

# 拡散問題を対象とした時間域境界積分方程式法における wavelet 基底の適用とその計算効率

## COMPUTATIONAL EFFICIENCY OF TIME-DOMAIN BOUNDARY INTEGRAL EQUATION METHOD USING WAVELETS FOR DIFFUSION PROBLEMS

紅露一寛<sup>1)</sup>, 五十嵐和希<sup>2)</sup>, 阿部和久<sup>3)</sup>

Kazuhiro KORO, Kazuki IGARASHI and Kazuhisa ABE

- 1) 新潟大学大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail: kouro@eng.niigata-u.ac.jp)
- 2) ジェコス (研究当時 新潟大学工学部建設学科学生)
- 3) 新潟大学工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail: abe@eng.niigata-u.ac.jp)

The non-orthogonal wavelet is applied to the time-domain boundary element method for diffusion problems. The non-orthogonal wavelet is developed with the B-spline, and has a compact support, an explicit form and vanishing moments of order  $n$ . The time-domain boundary integral equation is discretized using the wavelet. The *a priori* estimation of the coefficient matrix entries is developed for matrix compression, and is used for truncation carried out before calculation of double boundary integrals. The compression rate of the coefficient matrix and the computation time are investigated through numerical results. The discretization using the wavelets enables us to reduce the computational work and the memory requirements for time convolution. The use of the wavelets with the higher order vanishing moments is advantageous on the computational efficiency.

**Key Words:** non-orthogonal wavelet, time-domain boundary integral equation, diffusion problem

### 1. はじめに

この 20 年の間, 境界要素法 (BEM) の計算効率の向上に関する研究が国内外で精力的に進められてきており, 高速多重展開法がその決定版としての地位を築きつつある<sup>(1)</sup>. 一方, wavelet を使って境界要素解析を効率よく実行する方法も提案されており, 主として Laplace 問題<sup>(2)</sup>において有効性が示されてきた. Wavelet の適用が境界要素解析の効率化につながる最大の鍵は, wavelet が有しているゼロモーメント性 (所定次数以下の単項式との直交性) である. この性質によって基本解の主要項が消失し, 結果として得られる係数行列の大半が微小な成分となり, これらを切り捨てる (0 とみなす) ことで係数行列を圧縮し, 計算効率を改善する.

特に, Laplace 問題に対しては, 著者らは境界要素解析に適した wavelet として, スプライン関数を用いて非直交 wavelet を構成した<sup>(2)</sup>. また, wavelet を用いた境界要素解析の信頼性や効率を高めることを目的として, 切り捨て基準値の合理的な設定方法<sup>(3)</sup> や係数行列成分の計算の際に必要な境界積

分を効率化するための重み付き積分公式<sup>(4)</sup>の構成, 切り捨て実行後の係数行列の保存成分数の漸近評価<sup>(5)</sup>に取り組んできた. しかし, これらの取り組みは Laplace 問題を対象としたものにとどまっている.

今日では, Laplace 問題以外にも wavelet を用いた境界要素解析の試みが報告されている. 例えば, Ravnik ら<sup>(6)</sup>は, 非圧縮粘性流れの境界要素解析に適用している. しかし, 対象とする問題に応じて積分方程式の基本解が異なるにも関わらず, Laplace 問題で既に計算効率の改善効果が確認されている wavelet を他の問題にそのまま適用することに関して, 十分な検討がなされているとは言い難い. また, 著者らは拡散問題の時間域境界積分方程式の離散化に Haar wavelet を用い, 畳み込み積分計算の効率化が可能であることを示した<sup>(7)</sup>が, wavelet 基底のゼロモーメント性の選択が計算効率に及ぼす影響について未検討である. なお, 近年, 時間に関する近似関数に wavelet を用いて時間域境界積分方程式を離散化する手法<sup>(8)</sup>も提案されており, 時間発展問題の境界要素解析に対する wavelet 基底の適用手法を確立するためには, その計算効率の改善効果を総合的に検討する必要がある.

そこで本研究では、線形拡散問題の時間域積分方程式を wavelet 基底を用いて離散化し、文献<sup>(2)</sup>の非直交 wavelet を用いることで計算効率の改善が可能であることを示す。また、離散化に用いる非直交 wavelet のゼロモーメント次数の選択が解析時の計算効率に及ぼす影響について検討する。

## 2. 拡散問題を対象とした時間域境界積分方程式法

本研究では、拡散問題を対象とした時間域境界積分方程式法において、積分方程式の離散化に wavelet 基底を用いた場合を対象に、その計算効率について論じる。本節では、積分方程式の定式化と離散化について説明する。

### 2.1. 時間域境界積分方程式

本研究で対象とする拡散問題は、 $\nabla$  をナブラ演算子として、次の初期値・境界値問題として記述される。

$$\dot{u}(\mathbf{x}, t) = k\nabla^2 u(\mathbf{x}, t), \quad (\text{in } \Omega), \quad (1)$$

$$u(\mathbf{x}, t)|_{t=t_0} = u_0(\mathbf{x}), \quad (\text{in } \Omega),$$

$$u(\mathbf{x}, t) = \bar{u}(\mathbf{x}, t), \quad (\text{on } \Gamma_u), \quad (2)$$

$$q(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = \bar{q}(\mathbf{x}, t), \quad (\text{on } \Gamma_q),$$

ここで、 $\Omega$  は領域であり、境界  $\Gamma$  は  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$ ,  $\emptyset = \Gamma_u \cap \Gamma_q$  なる2つの部分境界  $\Gamma_u$ ,  $\Gamma_q$  からなるものとする。なお、 $k$  は定数であり、 $n$  は境界上の点における外向き法線方向を表わす。また、 $u$  は場の変数、 $q = \partial u / \partial n$  であり、 $t$  は時間、 $t_0$  は初期時刻である。

式(1)、(2)の初期値・境界値問題に対応する時間域境界積分方程式は、次式で与えられる<sup>(9)</sup>。

$$\begin{aligned} & c(\boldsymbol{\xi}, t)u(\boldsymbol{\xi}, t) + k \int_{t_0}^t \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \tau; \boldsymbol{\xi}, t)u(\mathbf{x}, \tau) d\Gamma_x d\tau \\ & - k \int_{t_0}^t \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}, \tau; \boldsymbol{\xi}, t)q(\mathbf{x}, \tau) d\Gamma_x d\tau \quad (3) \\ & - \int_{\Omega} u^*(\mathbf{x}, t_0; \boldsymbol{\xi}, t)u_0(\mathbf{x}) d\Omega = 0, \end{aligned}$$

ただし、 $\boldsymbol{\xi}$  はソース点、 $\mathbf{x}$  は積分点であり、 $c(\boldsymbol{\xi}, t)$  は点  $\boldsymbol{\xi}$  において境界が滑らかであれば  $1/2$  となる。

式(3)において、 $u^*$ ,  $q^*$  は式(2)の問題の基本解であり、 $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$  として、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u^*(\mathbf{x}, \tau; \boldsymbol{\xi}, t) &= \frac{H(t-\tau)}{4\pi k(t-\tau)} \exp\left[-\frac{r^2}{4k(t-\tau)}\right], \quad (4) \\ q^*(\mathbf{x}, \tau; \boldsymbol{\xi}, t) &= \frac{\partial u^*}{\partial n}(\mathbf{x}, \tau; \boldsymbol{\xi}, t), \end{aligned}$$

ここで、 $H(\cdot)$  は Heaviside のステップ関数である。

### 2.2. 時間に関する離散化

式(3)を離散化するにあたり、まず時間に関する離散化について考える。本研究では、時間領域として  $t_0 \leq \tau \leq t_M$  を考え、時間刻み幅  $\Delta t$  を一定の下で時間軸上に  $u$ ,  $q$  の値の評価点 ( $t_p = p\Delta t$ ,  $p = 0, 1, \dots, M$ ) を置く。離散化においては、 $u$ ,  $q$  は時間軸上で後退方向に区間一定となるように近似し、式(3)に含まれる  $\tau$  に関する時間積分を解析的に計算す

る。その結果、時刻  $t_M = M\Delta t$  における次の境界積分方程式を得る<sup>(9)</sup>。

$$\begin{aligned} & c(\boldsymbol{\xi})u^{(M)}(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} Q_M^{*(M)}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})u^{(M)}(\mathbf{x}) d\Gamma_x \\ & - \int_{\Gamma} U_M^{*(M)}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})q^{(M)}(\mathbf{x}) d\Gamma_x \\ & = \int_{\Omega} u^*(\mathbf{x}, t_0; \boldsymbol{\xi}, t_M)u_0(\mathbf{x}) d\Omega_x \quad (5) \\ & - \sum_{p=1}^{M-1} \int_{\Gamma} Q_p^{*(M)}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})u^{(p)}(\mathbf{x}) d\Gamma_x \\ & + \sum_{p=1}^{M-1} \int_{\Gamma} U_p^{*(M)}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})q^{(p)}(\mathbf{x}) d\Gamma_x, \end{aligned}$$

ここで、基本解を時間積分した関数  $U_p^{*(M)}$ ,  $Q_p^{*(M)}$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} U_p^{*(M)} &:= k \int_{t_{p-1}}^{t_p} u^*(\mathbf{x}, \tau; \boldsymbol{\xi}, t_M)\phi_p(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi} [E_i(\alpha_{M-p+1}) - E_i(\alpha_{M-p})], \\ Q_p^{*(M)} &:= k \int_{t_{p-1}}^{t_p} q^*(\mathbf{x}, \tau; \boldsymbol{\xi}, t_M)\phi_p(\tau) d\tau \\ &= -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} [e^{-\alpha_{M-p+1}} - e^{-\alpha_{M-p}}], \quad (6) \end{aligned}$$

$$E_i(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-\eta}}{\eta} d\eta, \quad E_i(\infty) = 0,$$

$$\alpha_{M-p+1} := \frac{r^2}{4k(t_M - t_{p-1})} = \frac{r^2}{4k(M-p+1)\Delta t},$$

$$\alpha_{M-p} := \frac{r^2}{4k(t_M - t_p)} = \frac{r^2}{4k(M-p)\Delta t}.$$

### 2.3. Wavelet 基底を用いた境界積分方程式の離散化

wavelet 基底を用いて、次に、式(5)の境界積分方程式の離散化について考える。本研究では、まず、式(5)に含まれる境界値関数  $u^{(p)}(\mathbf{x})$ ,  $q^{(p)}(\mathbf{x})$  を wavelet 級数で近似する。その結果、 $u^{(p)}(\mathbf{x})$ ,  $q^{(p)}(\mathbf{x})$  は  $\mathbf{x} \in \Gamma$  として、

$$\begin{aligned} u^{(p)}(\mathbf{x}) &\approx \sum_{j=1}^{n_s} \phi_j(\mathbf{x})\hat{u}_j^{(p)} + \sum_{l=0}^{m_r} \sum_{j=1}^{n_w(l)} \psi_{l,j}(\mathbf{x})\hat{u}_{l,j}^{(p)} \\ &= \sum_{j=1}^N w_j(\mathbf{x})U_j^{(p)} =: \tilde{u}^{(p)}(\mathbf{x}), \quad (7) \\ q^{(p)}(\mathbf{x}) &\approx \sum_{j=1}^{n_s} \phi_j(\mathbf{x})\hat{q}_j^{(p)} + \sum_{l=0}^{m_r} \sum_{j=1}^{n_w(l)} \psi_{l,j}(\mathbf{x})\hat{q}_{l,j}^{(p)} \\ &= \sum_{j=1}^N w_j(\mathbf{x})Q_j^{(p)} =: \tilde{q}^{(p)}(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

のように記述できる。ここで、 $\phi_j(\mathbf{x})$ ,  $\psi_{l,j}(\mathbf{x})$  はそれぞれ scaling 関数、wavelet であり、これらをまとめて  $w_j(\mathbf{x})$  で表わす。また、 $\hat{u}_j^{(p)}$ ,  $\hat{u}_{l,j}^{(p)}$ ,  $\hat{q}_j^{(p)}$ ,  $\hat{q}_{l,j}^{(p)}$  は時刻  $t_p$  での wavelet 展開係数である。  $m_r$  は wavelet 展開の最高階層であり、 $n_s$ ,  $n_w(l)$  はそれぞれ scaling 関数、階層  $l$  の wavelet の数である。なお、以下では  $\phi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n_s$ ),  $\psi_{l,j}$  ( $l = 0, 1, \dots, m_r$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_w(l)$ ) からなる基底関数  $w_i(\mathbf{x})$  の総数は  $N$  であるものとする。

本研究では、文献<sup>(2)</sup>で構成した非直交スプライン wavelet の適用を考える。この wavelet は、境界要素解析の効率化に供することを想定して構成されている。基底の構成においては、基底の直交性を緩和することでコンパクトサポートを実現し、同時に任意次数の下での補間、任意次数のゼロモーメントの選択を可能としている。以下では、区間一定関数を scaling 関数とし、区間一定でゼロモーメント次数が1次、3次の2種類の wavelet のいずれかをを用いる。Wavelet の最大の特徴は、wavelet 級数の基底関数の補間次数とゼロモーメント次数をただ一つ定めると、一つの mother wavelet の拡大・縮小と平行移動によって、級数展開に用いるすべての wavelet 基底を作り出すことができる。本研究で用いる wavelet においては、 $\phi$ ,  $\psi$  に関する mother wavelet はそれぞれ次式で与えられる。

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (8)$$

$$\psi(x) = \psi^{(n)}(x) = \binom{2n-1}{n}^{-1/2} \cdot \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \phi(2x-k). \quad (9)$$

式(9)の wavelet は次のゼロモーメント性を有しており、 $n$  はその次数である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^p \psi(x) dx = 0, \quad (p = 0, 1, \dots, n-1) \quad (10)$$

なお、区間一定・1次ゼロモーメント性を有する非直交 wavelet は、正規直交 wavelet の一つである Haar wavelet に一致する。区間一定の非直交 wavelet を用いて有限区間での wavelet 級数展開を定義する場合、基底関数の配置の対称性の保持の観点から、奇数次の wavelet を用いる必要がある。また、区間一定・3次ゼロモーメント性を有する wavelet を用いる際には、級数展開を定義する有限区間の上下端に1個ずつの境界 wavelet が必要となる。この場合、4次ゼロモーメント性を有する wavelet を境界 wavelet として用いる。非直交 wavelet の構成方法、および境界要素解析への適用方法の詳細については、文献<sup>(2)</sup>を参照されたい。

式(7)を式(5)に代入し、 $w_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) を重み関数として Galerkin 法を適用する。すなわち、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Gamma} w_i(\xi) \tilde{u}^{(M)}(\xi) d\Gamma_{\xi} \\ & + \int_{\Gamma} w_i(\xi) \int_{\Gamma} Q_M^{*(M)}(x; \xi) \tilde{u}^{(M)}(x) d\Gamma_x d\Gamma_{\xi} \\ & - \int_{\Gamma} w_i(\xi) \int_{\Gamma} U_M^{*(M)}(x; \xi) \tilde{q}^{(M)}(x) d\Gamma_x d\Gamma_{\xi} \\ & = \int_{\Gamma} w_i(\xi) \int_{\Omega} u^*(x, t_0; \xi, t_M) u_0(x) d\Omega_x d\Gamma_{\xi} \\ & - \sum_{p=1}^{M-1} \int_{\Gamma} w_i(\xi) \int_{\Gamma} Q_p^{*(M)}(x; \xi) \tilde{u}^{(p)}(x) d\Gamma_x d\Gamma_{\xi} \\ & + \sum_{p=1}^{M-1} \int_{\Gamma} w_i(\xi) \int_{\Gamma} U_p^{*(M)}(x; \xi) \tilde{q}^{(p)}(x) d\Gamma_x d\Gamma_{\xi}. \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $g_{ij}^{(M,p)}$ ,  $h_{ij}^{(M,p)}$ ,  $b_i^{(M)}$  を次式のように定義すると、

$$\begin{aligned} g_{ij}^{(M,p)} &:= \int_{\Gamma} w_i(\xi) \int_{\Gamma} U_p^{*(M)}(x; \xi) w_j(x) d\Gamma_x d\Gamma_{\xi}, \\ h_{ij}^{(M,p)} &:= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} w_i(\xi) w_j(\xi) d\Gamma_{\xi} \\ & + \int_{\Gamma} w_i(\xi) \int_{\Gamma} Q_p^{*(M)}(x; \xi) w_j(x) d\Gamma_x d\Gamma_{\xi} \\ b_i^{(M)} &= \int_{\Gamma} w_i(\xi) \int_{\Omega} u^*(x, t_0; \xi, t_M) u_0(x) d\Omega_x d\Gamma_{\xi}, \end{aligned} \quad (12)$$

その結果、式(11)より次の代数方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N h_{ij}^{(M,M)} U_j^{(M)} - \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(M,M)} Q_j^{(M)} \\ & = b_i^{(M)} - \sum_{p=1}^{M-1} \left[ \sum_{j=1}^N \left\{ h_{ij}^{(M,p)} U_j^{(p)} - g_{ij}^{(M,p)} Q_j^{(p)} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

この式の左辺の未知量と既知量を整理し、未知量に関する連立1次方程式を解くと、時刻  $t_M$  における境界値の近似値が得られる。

### 3. 係数行列成分の切り捨て手法

#### 3.1. 係数成分の切り捨て判定条件

境界要素解析において wavelet 基底を適用した場合、基底関数と基本解の境界積分で定義される代数方程式の係数行列成分は、その大半が wavelet を含む積分の計算によって生成される。その際、wavelet 基底のゼロモーメント性<sup>(2)</sup>によってその大きさが微小となるため、それらを切り捨てる(保存や乗算の対象としない)ことで解析の効率化が実現することとなる。本研究では、係数行列成分の切り捨ては式(13)に含まれる係数  $g_{ij}^{(M,M)}$ ,  $g_{ij}^{(M,p)}$ ,  $h_{ij}^{(M,M)}$ ,  $h_{ij}^{(M,p)}$  を対象とする。切り捨て判定は、Beylkin 型の切り捨て手法に基づき  $g_{ij}^{(M,M)}$ ,  $g_{ij}^{(M,p)}$  の大きさを基準に実行する。なお、切り捨て対象成分に関する不要な境界積分計算を可能な限り省略し計算時間の短縮を図ることを目的として、切り捨て判定は一つの係数行列成分の計算の前後2度実行する。係数計算の前後における切り捨てをそれぞれ事前切り捨て、事後切り捨てと呼び、各々の切り捨て判定は次の条件式を用いて行なう。

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ij}^{(M,p)} &< \kappa g_{max}, & (\text{事前切り捨て}) \\ |g_{ij}^{(M,p)}| &< \kappa g_{max}, & (\text{事後切り捨て}) \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 $\tilde{g}_{ij}^{(M,p)}$  は式(12)で与えられる係数  $|g_{ij}^{(M,p)}|$  の近似評価値で、次小節で導出する。また、 $\kappa$  は切り捨て基準値であり、 $g_{max}$  は係数  $g_{ij}^{(M,p)}$  の代表値で、被積分関数  $U^*$  を定常問題の基本解  $-\ln r/(2\pi)$  に置き換えた上で、二重の境界積分により計算して得られた係数成分の絶対最大値で与える。

#### 3.2. 係数成分の近似評価式

本節では、 $|g_{ij}^{(M,p)}|$  の近似評価値  $\tilde{g}_{ij}^{(M,p)}$  の導出方法を示す。まず、対象とする係数成分は次式で定義される。

$$\begin{aligned} g_{ij}^{(M,p)} &= \int_{\Gamma} w_i(\xi) \int_{\Gamma} U_p^{*(M)}(x; \xi) w_j(x) d\Gamma_x d\Gamma_{\xi} \\ &= \int_{-1}^1 w_i(\eta) \int_{-1}^1 U_p^{*(M)}(\eta, \zeta) J_j(\zeta) d\zeta J_i(\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (15)$$

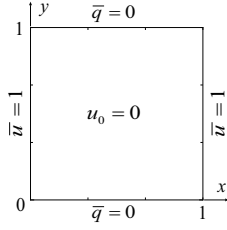


Fig. 1 初期条件と解析条件 .

ここで,  $J_i(\eta)$ ,  $J_j(\zeta)$  はそれぞれ基底関数  $w_i$ ,  $w_j$  が定義・配置される部分境界に関するヤコビアンである .

Haar wavelet を用いた際の近似評価値  $\tilde{g}_{ij}^{(M,p)}$  は, 文献 (7) に示した方法・式で与える . 紙面の都合上割愛するが, 詳細は文献 (7) を参照されたい .

一方, 区間一定・3 次ゼロモーメント性を有する非直交 wavelet を用いた場合には, サポート中央点周りの基本解の漸近展開を用いて, 近似評価式は次式で与える .

$$\tilde{g}_{ij}^{(M,p)} = \frac{|\beta_i| |\beta_j| |\bar{J}_i \bar{J}_j|}{n_i! n_j!} \left| \frac{d^{n_i+n_j} U_p^{*(M)}}{dr^{n_i+n_j}} \right|_{\eta=\zeta=0}, \quad (16)$$

$$\beta_i = \int_{-1}^1 \eta^{n_i} w_i(\eta) d\eta, \quad \beta_j = \int_{-1}^1 \zeta^{n_j} w_j(\zeta) d\zeta,$$

ここで,  $n_i$ ,  $n_j$  はそれぞれ  $w_i$ ,  $w_j$  のゼロモーメント次数であり, 0 または 3 で与える . そのため,  $U_p^{*(M)}$  の  $r$  に関する微係数は, 3 次微係数と 6 次微係数を評価すればよく, 次式で与える .

$$\frac{d^3 U_p^{*(M)}}{dr^3} = \begin{cases} \frac{3re^{-\alpha M-p}}{16\pi k^2 (M-p+1)^2 (M-p) (\Delta t)^2}, & (M \neq p) \\ \frac{1}{\pi r^3} (-4 + 3(1 + \alpha_1)) e^{-\alpha_1}, & (M = p) \end{cases} \quad (17)$$

$$\frac{d^6 U_p^{*(M)}}{dr^6} = \begin{cases} \frac{-15e^{\alpha M-p}}{16\pi k^3 (M-p)(M-p+1)^3 (\Delta t)^3} \cdot \left[ 1 - \frac{4k(M-p+1)\Delta t}{(M-p)r^2} \right], & (M \neq p) \\ \frac{120}{\pi} \left[ \frac{1}{r^6} - \frac{e^{-\alpha_1} (\alpha_1^2 + 2\alpha_1 + 2)}{64k^2 (\Delta t)^2 r^2 \alpha_1^2} \right], & (M = p) \end{cases} \quad (18)$$

#### 4. 解析結果

本研究では, 拡散問題の時間域境界積分方程式法において wavelet 基底を導入し, その際の使用メモリの削減効果や計算時間の短縮効果について検討する . 解析においては, Haar wavelet を用いた場合と, 3 次の非直交 wavelet を用いた場合とで解析結果を比較し, 計算負荷の軽減の観点から効果的な wavelet 基底の利用方法を論じる .

解析例として, 初期条件・境界条件が Fig.1 のように与えられる問題を考える . なお, 拡散係数は  $k=1$  とする .

解析においては, Table 1 に示す case1 ~ case6 の条件の下で,  $t=0.5$  まで ( $\Delta t=1/100$  ならば 50 ステップ,  $1/200$  なら

Table 1 解析における離散化条件 .

	Wavelet の最高階層	DOF	$\Delta t$
case1	2	96	1/100
case2	3	192	1/100
case3	4	384	1/100
case4	2	96	1/200
case5	3	192	1/200
case6	4	384	1/200

Table 2 解析に用いた最適な切り捨て基準値  $\kappa$  .

	$n=1$	$n=3$		$n=1$	$n=3$
case1	$1.0 \times 10^{-6}$	$1.0 \times 10^{-6}$	case4	$7.0 \times 10^{-8}$	$1.0 \times 10^{-7}$
case2	$3.0 \times 10^{-7}$	$1.0 \times 10^{-6}$	case5	$7.0 \times 10^{-8}$	$1.0 \times 10^{-7}$
case3	$1.0 \times 10^{-7}$	$1.0 \times 10^{-6}$	case6	$2.0 \times 10^{-8}$	$1.0 \times 10^{-7}$

Table 3 係数行列の圧縮率 (%) (解析第 1 ステップ生成成分) .

	$n=1$	$n=3$		$n=1$	$n=3$
case1	36.719	39.887	case4	31.684	41.623
case2	33.854	21.929	case5	27.365	26.752
case3	30.973	10.919	case6	25.298	14.277

らば 100 ステップ分の) 解析を行った . また, 対象領域の各辺を 3 つの scaling 関数で分割後, 境界値関数を Haar wavelet, ゼロモーメント次数 3 次の非直交 wavelet のいずれかを用いて近似し, 所定の切り捨て基準値を用いて解析を行った . 本研究において用いた切り捨て基準値  $\kappa$  は, 式 (16) の定義からも明らかのように, その値を 0 に設定すれば全ての成分が保存され, 近似解の誤差は離散化誤差のみとなり,  $\kappa$  の値を次第に大きくすると切り捨て誤差が増大する . 切り捨て誤差は離散化誤差と同程度まで許容できるから, そのような誤差の範囲内で最大の切り捨て基準値を用いれば, 最も効率よく解析を実行できる . そのため, 解析においては, 離散化誤差が時間依存性を有することを考慮して, 離散化誤差と比較して最終ステップまで精度低下を生じない範囲の  $\kappa = a \times 10^{-b}$  ( $1 \leq a$  (整数)  $\leq 9$ ,  $b$ : 自然数  $\kappa$ : 切り捨て基準値) の中で最大の値を最適値として設定した (Table 2) . 本来, 切り捨て基準値は解析に先だって設定すべきものであるが, 現段階では最適値を体系的に設定する方法がないこともあり, 複数の切り捨て基準値の下で解析を実行し, その中で上述の条件を満たすものを採用し, 結果として示した . なお, 各ステップにおける連立一次方程式の求解計算は, 対角スケール前処理付き GMRES 法を用いて実行した .

#### 4.1. 係数行列の圧縮率

まず, wavelet 基底のゼロモーメント次数の違いに起因する解析時の使用メモリの削減効果を検討するために, 係数行列の圧縮率を示す . ここで, 圧縮率は次式で定義する .

$$[\text{圧縮率} (\%)] = \frac{[\text{保存成分数}]}{[\text{全成分数}]} \times 100 \quad (19)$$

まず, 最適な切り捨て基準値を用いた場合における, 解析第 1 ステップで生じる係数行列 (成分:  $h_{ij}^{(M,M)}$ ,  $g_{ij}^{(M,M)}$ ) の圧縮率を Table 3 に示す . 最適な切り捨て基準値を用いた場合, 自由度 96 の場合はゼロモーメント次数 3 次 ( $n=3$ ) の wavelet を用いたほうが係数行列の圧縮効果は低いものの, 自由度 192, 384 の下では大小関係が逆転し, 圧縮率は

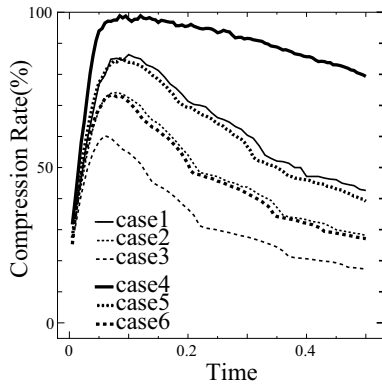


Fig. 2 係数行列の圧縮率 ( $n = 1$ )

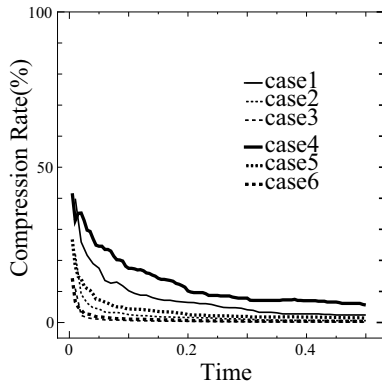


Fig. 3 係数行列の圧縮率 ( $n = 3$ )

ゼロモーメント次数 3 次の方が大幅に高くなっている．特に，case3 では， $n = 3$  を用いた場合， $n = 1$  である Haar wavelet を用いる場合のおよそ 3 倍の圧縮性能を示していることがわかる．ただし，wavelet 基底適用の有効性は，当該の係数行列においては wavelet を導入せずとも成分の大半が微小となることを考慮して，慎重に判断すべきと考える．

次に，各 case における解析第 2 ステップ以降の各ステップにおいて生じる，畳み込み積分計算に用いる係数行列（成分： $h_{ij}^{(M,p)}$ ， $g_{ij}^{(M,p)}$ ）の圧縮率について検討する．なお，文献<sup>(7)</sup>では，通常の境界要素解析ではこの係数行列は時間ステップの経過とともに微小成分の割合が低下し，最終的に密行列となることが示されている．解析結果を Fig.2, Fig.3 に示す．

1 次ゼロモーメント ( $n = 1$ )，3 次ゼロモーメント ( $n = 3$ ) のいずれを用いても，最高階層を高く設定し，相対的に関数のサポートの小さい基底関数を多数用いて関数近似を構成した方が，より高率で係数行列を圧縮できる．1 次ゼロモーメント ( $n = 1$ ) の wavelet を用いる場合，ステップ初期では係数行列の圧縮率が低くなっており，係数行列の圧縮性の改善効果はほとんど見られない．しかし，各 case において  $t = 0.07$  辺りからステップ毎に徐々に圧縮率が向上しており，時間ステップの増加に伴い係数行列の圧縮効果が発揮されている．一方，3 次ゼロモーメント ( $n = 3$ ) の wavelet を用いる場合，ステップ初期から多数の成分が切り捨てられ，各 case において圧縮率が著しく高くなっている． $n = 1$  の場合と比較すると，圧縮率は最大で  $1/8$  程度まで差が開いていることがわかる．

Table 4 計算時間の比較 ( $n = 1$ ) [単位:(sec)]

	切り捨て なし	事後切り捨て のみ	事前切り捨て あり
case1	87	87	82
case2	370	369	303
case3	1509	1524	988
case4	175	174	172
case5	740	743	679
case6	3063	3063	2468

Table 5 計算時間の比較 ( $n = 3$ ) [単位:(sec)]

	切り捨て なし	事後切り捨て のみ	事前切り捨て あり
case1	370	370	30
case2	1559	1536	44
case3	6300	6293	60
case4	737	735	99
case5	3107	3087	131
case6	12631	12596	170

以上の結果から，Laplace 問題の場合と同様，解析時の使用メモリの削減に対しては，wavelet のゼロモーメント次数を高く設定することが有効であることがわかる．ただし，wavelet を適用したことのメリットは，解析第 1 ステップに生成される係数行列に関してはさほど期待できず，むしろ畳み込み積分計算に用いる行列成分の削減に対してより顕著となると結論付けられる．

#### 4.2. 計算時間の短縮効果

次に，計算時間の削減効果について検討する．Table 4, Table 5 は，各々の離散化，切り捨て条件の下で解析に要した時間を示したものである．計算時間は， $t = 0.5$  での近似解を得るまでの (50 または 100 ステップ分の) 総計算時間を示している．なお，切り捨て基準値は Table 2 に示す最適な切り捨て基準値を用いている．

非直交 wavelet を用いた境界要素解析では，基底関数がスプラインとして定義される．そのため，係数行列成分の計算の際には基底関数の区分一定区間に積分領域を細分割した上で，細分割区間毎に二重の境界積分を計算する必要がある．ゼロモーメント次数 1 次  $n = 1$  の wavelet は 2 つの区間一定値からなるのに対し，ゼロモーメント次数 3 次  $n = 3$  では 4 つの区間一定値から構成される．それゆえ，係数一成分の積分計算に  $2^2 = 4$  倍の計算量を必要とすることが予想される．解析結果でも，すべての係数成分の境界積分計算を実行した場合（切り捨てを行わない場合と，事後切り捨てのみを行う場合が該当）では，ゼロモーメント次数 3 次  $n = 3$  の wavelet を用いると，ゼロモーメント次数 1 次  $n = 1$  の場合のおよそ 4 倍の計算時間を要している．そのため，このような条件下では，計算時間の短縮に対しては高次ゼロモーメント性を有する wavelet の適用は不利となることが懸念される．

しかし，wavelet 基底を用いた場合，計算時間の大半が係数行列成分の計算に費やされているため，事前切り捨てにより可能な限り不要な積分計算を省略することで，計算時間を大幅に短縮することが可能となっている．短縮効果は係数行列の圧縮率が高い  $n = 3$  の基底を用いた場合のほうが顕著となっており，特に短縮効果が顕著な case3 を比較すると，

$n = 1$  の基底を用いた場合では約 65% に短縮されている一方,  $n = 3$  の場合では約 1% まで短縮されている.

以上の結果から, 係数行列の圧縮効果が高い高次のゼロモーメント性をもつ wavelet の利用は, 計算時間の短縮に対しても著しく有効であると結論づけられる.

## 5. おわりに

本研究では, 拡散問題を対象とした時間域境界積分方程式法において, wavelet 基底を用いて境界積分方程式を離散化し, 解析時の使用メモリの削減効果や計算効率の改善効果について, wavelet のゼロモーメント次数の選択の影響を中心に検討した. Wavelet は, ゼロモーメント次数 1 次の Haar wavelet と, ゼロモーメント次数 3 次の区間一定非直交 wavelet の 2 種類を比較対象とした.

係数行列成分の切り捨ては, 適用が容易な Beylkin 型の手法を採用した. また, 切り捨て対象となって計算が不要となる係数成分に関する境界積分を省略するために, 係数行列成分の近似評価式を構成し, その評価値が所定値以下となった場合には当該成分を 0 とみなす事前切り捨ても併用した.

その結果, 解析第 1 ステップで生じる係数行列の圧縮率は, 低自由度の下では圧縮効果あまり期待できないものの, 高自由度ではより高次のゼロモーメント次数となる wavelet を用いる方が高率での係数行列の圧縮が可能となることがわかった. なお, 当該の係数行列成分は, 基本解の性質から wavelet を用いない場合でも行列のスパース性が期待できるため, wavelet を適用することの顕著な利点は見出し難い. 解析第 2 ステップ以降の各ステップで生成される, 畳み込み積分計算に用いる係数行列の圧縮率は, ゼロモーメント次数 3 次の wavelet を用いると, 1 次の基底と比べてステップ初期から多数の成分が切り捨てられており, 圧縮率が著しく高くなることから, 当該問題・手法においても, Laplace 問題と同様, より高次のゼロモーメント性を有する wavelet を適用した方が係数行列の圧縮性の面では有利となり, その効果は畳み込み積分計算に用いる係数行列の方がより顕著となることがわかった. なお, 切り捨てを実行することで係数行列の性質が変化し, 反復解法の収束性に悪影響を及ぼすことが懸念されるが, 近似解の精度を低下させない範囲での切り捨てを実行する限りにおいては, 反復回数急増等の問題は生じないことを申し添えておく.

Wavelet を用いた境界要素解析では, 係数行列の作成に大半の処理時間を要する. 本研究では, 離散化に用いている非直交 wavelet がスプラインで定義されており, ゼロモーメント次数や補間次数に比例してスプラインの区間数が多くなる. 境界積分はスプライン小区間単位で実施するため, 使用メモリが削減できても計算時間が増大することが懸念される. しかし, 実際の解析において係数行列成分の事前切り捨てを併用することで, 保存成分数の削減が計算時間の短縮に直結可能となることが確認できた. この点は, 解析例を通して確認できた.

なお, 今回の検討では, 所定の解析時間内で近似解の誤差

が増大しない条件の下で切り捨て基準値を決定した. しかし, 解析対象が非定常問題であるため, 境界上の離散化誤差は時間の経過とともに変動することになる. 特に前節で示した解析例では, 解析初期では離散化誤差が大きいとため, より多くの係数成分を切り捨てることが可能であるが, 時間の経過とともに  $t \rightarrow \infty$  とした定常解に漸近し, その場合離散化誤差は 0 に漸近する. すなわち, 定常状態に近づくにつれて離散化誤差が 0 に漸近し, 切り捨ての効果が徐々に薄れていくことが予想される. また, 最適な切り捨て基準値の設定においては, 定常状態の離散化誤差に基づいた決定法を導入することも考えられるが, 前出の解析例のように定常解の離散化誤差が 0 に漸近する場合には適用不可能となる. そのため, 今後は, 時間と空間の誤差を考慮した体系的な切り捨て基準値の評価方法や, 切り捨て実行後の係数行列の保存成分の漸近評価等に取り組んでいきたい. また, 係数行列成分の漸近評価式を用いた係数計算の効率化についても検討する価値があると考えられる.

## 参考文献

- (1) N. Nishimura: Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *Appl. Mech. Rev.*, Vol.55, pp.299-324, 2002.
- (2) Koro, K., Abe, K.: Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis. *Eng. Anal. Bound. Elems.*, Vol.25, pp.149-164, 2001.
- (3) K. Koro, K. Abe: A practical determination strategy of optimal threshold parameter for matrix compression in wavelet BEM. *Int. J. Numer. Engrg.*, Vol.57, pp.169-191, 2003.
- (4) 紅露一寛, 平林秀之, 阿部和久: Wavelet 基底を用いた境界要素解析の効率化のための wavelet 重み付き Gauss 積分公式. 土木学会応用力学論文集, Vol.4, pp.127-136, 2001.
- (5) 紅露一寛, 阿部和久: Wavelet BEM における Beylkin 型係数切り捨て手法の行列圧縮効果に関する検討. 土木学会応用力学論文集, Vol.6, pp. 301-310, 2003.
- (6) Ravnik, J., Škerget, L., Hribersek, M.: The wavelet transform for BEM computational fluid dynamics. *Eng. Anal. Bound. Elems.*, Vol.28, pp.1303-1314, 2004.
- (7) 紅露一寛, 石山静香, 阿部和久: 拡散問題を対象とした wavelet 境界要素解析とその有効性. 計算工学講演会論文集, Vol.13, pp.147-150, 2008.
- (8) Barmada, S.: Improving the performance of the boundary element method with time-dependent fundamental solutions by the use of a wavelet expansion in the time domain. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.71, pp.363-378, 2007.
- (9) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行: 計算力学と CAE シリーズ 2 境界要素法, 培風館, 1991.