

アレー状球形散乱体による反射と透過に関する考察

REFLECTION AND TRANSMISSION BY ARRAY OF SPHERICAL SCATTERERS

山田将紀¹⁾・北原道弘²⁾

Masanori YAMADA and Michihiro KITAHARA

- 1) 東北大学大学院工学研究科 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06, E-mail: yamada@nde.civil.tohoku.ac.jp)
 2) 東北大学大学院工学研究科 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06, E-mail: kitahara@civil.tohoku.ac.jp)

The scattering problem for a doubly periodic array of spherical scatterers is formulated by taking advantage of the geometrical periodicity. The reflected and transmitted wave motions are expressed as the superposition of infinite number of wave modes. In the low frequency range, only the lowest order modes are propagating. Reflection and transmission coefficients for the lowest-order modes are determined by the application of reciprocal theorem. These reflection and transmission coefficients are expressed as integrals of the wave field over the surface of a single cavity. The boundary integral equation is advantageously used to determine the wave field on the surface of the single cavity in the unit cell. Numerical examples are shown for the reflection and transmission coefficients and the wave fields on the surface.

Key Words : *Doubly Periodic Structures, Reflection, Transmission, Reciprocal Theorem, Power Balance*

1. はじめに

材料内の損傷がある一つの平面内に進展した場合、この損傷度を推定するための一手段として超音波の反射と透過特性の利用が考えられる。Kinra 等^{1),2)}は平面アレー的に球形インクルージョンが分布した一つの損傷モデルを作成し、超音波の反射率と透過率を実験的に計測する方向から研究を進めている。一方、著者等は平面内に2重周期分布した散乱体による反射率と透過率を数値解析的に決定する方法³⁾を示し、文献^{4),5)}の結果をもとにして2重周期構造を有する基本解の収束を高速化するための一提案⁶⁾、および高速化基本解の反射と透過率計算への適用⁷⁾を行い、数値解析的に反射率と透過率を決定するための一連の研究を行ってきた。

平面内に2重周期分布した球形散乱体による反射率と透過率を解析した前論文⁷⁾においては、反射率と透過率の精度が保証されていなかった。このため本論文では、ユニットセル内のエネルギーバランスから反射率と透過率が満足すべき関係式を導き、数値解析的に決定した反射率と透過率の精度について検討する。また、最低次の波動モードから次の波動モードが生じるカットオフ波数に着目してカットオフ波数前後の球形散乱体表面上の波動場について数値解析を行い、散乱体表面上の波動モードが有する一特性について考察する。

2. アレー状球形散乱体による反射・透過問題

解析対象とするアレー状球形散乱体を Fig.1 に示す。ここでは、 $x_1 - x_2$ 平面上に中心を有する無限個

の球形散乱体が x_1 軸と x_2 軸に沿って周期的に存在している二重周期構造の場合を考えており、 x_1 軸に沿う各球の中心間距離が b 、 x_2 軸に沿う中心間距離が c である。また、これら全ての球の半径は等しく a とする。入射波が与えられたとき、反射波と透過波の振幅、即ち反射率と透過率を決定することが以下の問題となる。

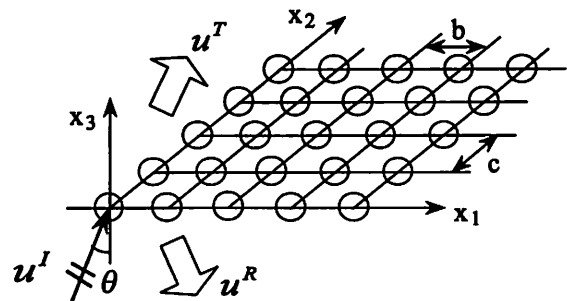


Fig.1 Reflection and transmission problem

本論文では、スカラー場に関する三次元波動問題を考える。このとき、波動場 u は次のヘルムホルツ方程式を満足する。

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (1)$$

ここに、 k は波数である。各球面上の境界条件として、次のようなノイマン条件が与えられている場合を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (2)$$

入射波は $x_1 - x_3$ 平面内に伝播ベクトル \mathbf{p} をもつ平面波とする。

$$u^I(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (3)$$

伝播ベクトル \mathbf{p} は x_3 軸との角度を θ とすると次のように表すことができる。

$$\mathbf{p} = (\sin \theta, 0, \cos \theta) \quad (4)$$

3. 散乱波の表現

アレー状球形散乱体による散乱問題において、全波動場 u は入射波 u^I と散乱波 u^S の重ね合わせとして次のように書ける。

$$u = u^I + u^S \quad (5)$$

入射波の伝播ベクトルは $x_1 - x_3$ 平面内にあり、球形散乱体は x_1 軸に沿って無限個配置されているため、散乱波 u^S は入射波の位相 $\exp(ikp_1x_1) = \exp(ikx_1 \sin \theta)$ と同じ位相構造を有し、 u^S は次のように書ける。

$$u^S(\mathbf{x}) = \bar{u}^S(\mathbf{x})e^{ikx_1 \sin \theta} \quad (6)$$

式(2)に示した境界条件と散乱体の二重周期性より、上式(6)中の $\bar{u}^S(\mathbf{x})$ も $x_1 - x_2$ 座標に関して周期構造を有することがわかる。これより、散乱波 u^S をフーリエ級数で表現すると次のようになる。

$$u^S(\mathbf{x}) = \sum_p \sum_q \Phi_{\pm}^{pq} e^{i(\alpha_p x_1 + \beta_q x_2 \pm \gamma_{pq} x_3)} \quad (7)$$

ここで、 Φ_{+}^{pq} と Φ_{-}^{pq} はそれぞれ $x_3 > 0$ と $x_3 < 0$ に対応した係数である。また p, q は整数として、 $\alpha_p, \beta_q, \gamma_{pq}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \alpha_p &= k \sin \theta + 2p\pi/b, & \beta_q &= 2q\pi/c \\ \gamma_{pq} &= [k^2 - (\alpha_p)^2 - (\beta_q)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (8)$$

式(7)と(8)の各項が波の各波動モードに対応しており、 $+\gamma_{pq}$ は透過波を、 $-\gamma_{pq}$ は反射波を表している。 $p = q = 0$ のときは γ_{pq} が実数値となり、式(7)は伝播する波を表す。また $p = q = 0$ 以外のときは、波数 k が

$$k = \omega/c = \min[(\alpha_p)^2 + (\beta_q)^2]^{1/2} \quad (9)$$

より小さい場合は、0次モードの波動だけが伝播波となり、それ以外の波は γ_{pq} が虚数になり、 $|x_3|$ の値が大きくなるに従って減衰する。それぞれの波動モードは伝播波として存在し得る限界のカットオフ波数を有している。波数 k が式(9)よりも増加すると、1次モードの波が伝播波となる。すなわち式(9)で表される波数が1次モードの波のカットオフ波数であり、これより小さい波数のときは0次モードの波だけが伝播波として現れることになる。

4. 反射率と透過率の導出

以下、0次の波動モードだけを考える。式(5)と式(7)から、 $x_3 > 0$ における全波動場 u_+ と $x_3 < 0$ における全波動場 u_- は $p = q = 0$ より次のように書ける。

$$u_+(\mathbf{x}) = (1 + \Phi_+^{00})e^{ik\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \quad (10)$$

$$u_-(\mathbf{x}) = e^{ik\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + \Phi_-^{00}e^{ik\mathbf{p}_- \cdot \mathbf{x}} \quad (11)$$

ここで、 \mathbf{p}_- は反射波の伝播ベクトルで

$$\mathbf{p}_- = (\sin \theta, 0, -\cos \theta) \quad (12)$$

と表され、 $u_+(\mathbf{x})$ は透過波、 $u_-(\mathbf{x})$ は反射波を表している。

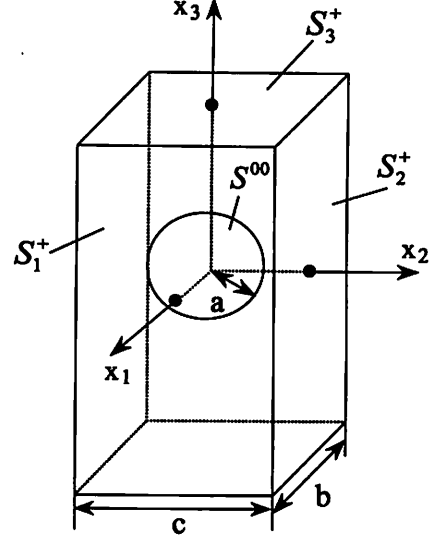


Fig.2 Unit cell

いま Fig.2 に示した内部に欠陥を1つだけ含む基本ユニットセルを考える。式(10)と(11)中の係数 Φ_+^{00} と Φ_-^{00} を決めるために相反定理を活用する。物体力が作用しない場を考えると、相反定理は次のようになる。

$$\int_S (u^B t^A - u^A t^B) dS = 0 \quad (13)$$

ここで、 $t = \partial u / \partial n$ であり、上式中の S は、球形散乱体の表面とユニットセルの直方体の表面である。

$$S = S_1^+ + S_2^+ + S_3^+ + S^{00} \quad (14)$$

ここに、 $S_i^+, S_i^- (i = 1, 2, 3)$ は Fig.2 に示したユニットセルの x_i -座標に関する正と負の表面を表しており、 S^{00} はユニットセル内の球形散乱体の表面である。

相反定理(13)において、状態 A として式(10)と(11)に示した実際の0次の伝播モード状態を、状態 B として次の仮想系を考える。

$$u_R^B = -e^{-ik\mathbf{p}_- \cdot \mathbf{x}} \quad (15)$$

$$u_T^B = -e^{-ik\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \quad (16)$$

この仮想系は実際の状態と逆位相をもち、0次モードの反射波および透過波と逆方向に伝播する波となるように選ばれている。この2つの系 A, B を式(13)の相反定理に適用すると、 S_1^+ および S_2^+ 上の積分は零となり、 S_3^+ と S^{00} 上の積分が残る。

反射率を求めるには、状態 B として式(15)の仮想系 u_R^B を採用し、式(13)に示した相反定理の状態 A には式(10)と(11)の実際の系を代入する。このとき、 u_+ については $x_3 > 0$ より S_3^+ 面上の、 u_- については

$x_3 < 0$ より S_3^- 面上の $\partial u / \partial n$ を与える. 式 (2) より S^{00} 上では $\partial u / \partial n$ が零であることを考慮すると, 相反定理は次のようになる.

$$\int_S (u_R^B t^A - u^A t_R^B) dS = \int_{S_3^-} (-2ik\Phi_-^{00} \cos\theta) dS - \int_{S^{00}} u^A t_R^B dS = 0 \quad (17)$$

上式より, 反射率 R は次のようになる.

$$R = \Phi_-^{00} = -F \int_{S^{00}} u^A t_R^B dS \quad (18)$$

ここで, F は散乱体間の間隔と入射角により決まる次のような量である.

$$F = (2ikbc \cos\theta)^{-1} \quad (19)$$

同様にして, 状態 B に式 (16) の仮想系 u_T^B を, 状態 A には式 (10) と (11) の実際の系を代入すれば, 透過率 T が次のように求まる.

$$T = 1 + \Phi_+^{00} = 1 - F \int_{S^{00}} u^A t_T^B dS \quad (20)$$

係数 F は反射率の場合の係数 (19) と同じ値になる.

反射率と透過率を表す式 (18) と (20) において, 係数 F の値は解析条件によって決まり, t_R^B と t_T^B の S^{00} 上の値は式 (15) と (16) を法線方向微分することによって得られる. すなわち, 球形散乱体上の全波動場 u^A を求めれば, 反射・透過率を基本ユニットセル内に存在する散乱体表面上の積分として決めることができる.

5. エネルギーバランス

Fig.2 に示すユニットセル内におけるエネルギーバランスを考える. 単位面積, 単位時間あたりのエネルギー p は次のように書ける.

$$p = \text{Re}[te^{-i\omega t}] \text{Re}[ve^{-i\omega t}] = \frac{1}{4}(tv^* + t^*v) + \frac{1}{4}(tve^{-2i\omega t} + t^*v^*e^{2i\omega t}) \quad (21)$$

ここで, $*$ は共役複素数を表す. 式 (21) を周期 $T = 2\pi/\omega$ で時間平均をとると次の式のようになる.

$$\langle p \rangle_{\text{unit}} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} p dt = \frac{1}{4}(tv^* + t^*v) = -\frac{1}{2}\omega \text{Im}[tu^*] \quad (22)$$

上式 (22) をユニットセル内に当てはめる. 周期 T で平均化したユニットセル内の総エネルギーはバランスして零となるので, 最終的に次式を得る.

$$\langle P \rangle = -\frac{1}{2}\omega \text{Im} \int_S tu^* dS \equiv 0 \quad (23)$$

ここで $S = S_1^\pm + S_2^\pm + S_3^\pm$ である. 式 (23) は入射波のエネルギー $\langle P^I \rangle$, 反射波のエネルギー $\langle P^R \rangle$, 透過波のエネルギー $\langle P^T \rangle$ の和である. 式 (23) に式 (3),(10),(11) を代入すると, S_1^\pm, S_2^\pm 面での積分が消え S_3^\pm 面での積分のみが残る. 反射率・透過率の表現式 (18),(20) を考

慮すると, 最終的に次のような反射率と透過率の関係式が導かれる.

$$|R|^2 + |T|^2 = 1 \quad (24)$$

上記関係式を後に数値解析により求める反射率・透過率の精度について検討する際に利用する.

6. 境界積分方程式

球形散乱体上の全波動場を境界要素法を用いて求める. 二重周期構造系の散乱問題に対して, Fig.2 に示す基本ユニットセルを考える. 原点に存在する散乱体から x_1 方向に p 個目, x_2 方向に q 個目の散乱体を含むユニットセル (p, q) 内の波動場は基本セル $(0, 0)$ 内の波動場 $u(\mathbf{x}^0)$ に入射波の位相項を考慮することにより, 次のように表すことができる.

$$u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}^0) e^{ikpb \sin\theta} \quad (25)$$

上記波動場の表現 (25) を考慮すると, Fig.1 に示した散乱問題に対する積分方程式を次のように定式化できる.

$$c(\mathbf{x}^0)u(\mathbf{x}^0) = \int_{S^{00}} \tilde{U}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \frac{\partial u(\mathbf{y}^0)}{\partial n_{\mathbf{y}^0}} dS_{\mathbf{y}^0} - \int_{S^{00}} \tilde{T}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) u(\mathbf{y}^0) dS_{\mathbf{y}^0} + u^I(\mathbf{x}^0) \quad (26)$$

ここで, \mathbf{x}^0 は基本セル内の球表面 S^{00} 上の点である. 境界条件 (2) より, 実際には上式の右辺第一項は零である. また, 上式中の $\tilde{T}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ は次のようになる.

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) &= \int_{S^{00}} \sum_m \sum_n \frac{\partial U(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0; m, n)}{\partial n_{\mathbf{y}^0}} e^{ikmb \sin\theta} dS_{\mathbf{y}^0} \\ &= \int_{S^{00}} \sum_l \frac{\partial U(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0 + l)}{\partial n_{\mathbf{y}^0}} e^{ikmb \sin\theta} dS_{\mathbf{y}^0} \end{aligned} \quad (27)$$

ここで, $l = (mb, nc, 0)$ であり, l に関する総和は二重級数和を意味する. 上式 (27) 中の基本解 $U(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0 + l)$ を文献^{6),7)} によって数値解析に適した高速収束型の基本解に変換すると $\tilde{T}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ の具体的表現を得る.

$$\tilde{T}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} e^{ikmb \sin\theta} \int_0^\infty \int_{S^{00}} \sum_l e^{ikr} e^{-r^2\rho^2} \{ik - 2r\rho^2\} \{\hat{r} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}^0)\} dS_{\mathbf{y}^0} d\rho \quad (28)$$

ここで, \hat{r} は点 \mathbf{x}^0 から点 \mathbf{y}^0 の方向を向く単位ベクトルである.

$$\hat{r} = \frac{\mathbf{y}^0 + l - \mathbf{x}^0}{|\mathbf{y}^0 + l - \mathbf{x}^0|} \quad (29)$$

7. 数値解析例

7.1 解析条件

数値解析の問題設定と球形散乱体に対する境界要素分割を Fig.3 に示す. ここでは, 形状は平面四角形要素

で近似し，要素上の未知量は一定近似を採用している．球の半径は a であり，球面上の θ 方向分割数は 15， φ 方向分割数は 12 である．以下の解析において，アレー状散乱体は x_1, x_2 軸に沿う球の中心間距離が共に同じで，その間隔 b を球の半径 a で割って無次元化した b/a の値が 3.0, 4.0, 5.0 の 3 つの場合を考える．また，入射波は x_3 軸方向 ($\theta = 0^\circ$) に伝播する平面波を考える．

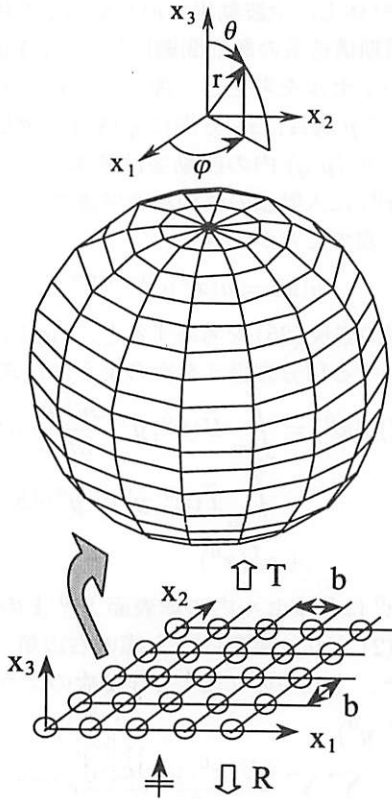


Fig.3 Boundary elements

7.2 反射率と透過率

4 節の結果を基に反射率 R と透過率 T を求めた結果を示す．4 節の定式化は 0 次の伝播波動モードを対象にしているため，式 (9) に示したカットオフ波数までの波数に対して解析を行う．この解析では $b = c$ かつ入射角 $\theta = 0^\circ$ であり，式 (9) の右辺が最小値を取るのは，式 (8) より $p = 1, q = 0$ または $p = 0, q = 1$ の場合である．このときカットオフ波数は次のようになる．

$$k^c = 2\pi/b \quad (30)$$

Fig.4 から Fig.6 に反射率 R と透過率 T の波数依存性を示す．図の横軸が無次元化波数 ak であり，縦軸が反射率 R (丸) と透過率 T (四角) である．また，カットオフ波数はそれぞれ， $ak^c = 2\pi/5 = 1.26 (b/a = 5.0, \text{Fig.4})$ ， $ak^c = 2\pi/4 = 1.57 (b/a = 4.0, \text{Fig.5})$ ， $ak^c = 2\pi/3 = 2.06 (b/a = 3.0, \text{Fig.6})$ となる．

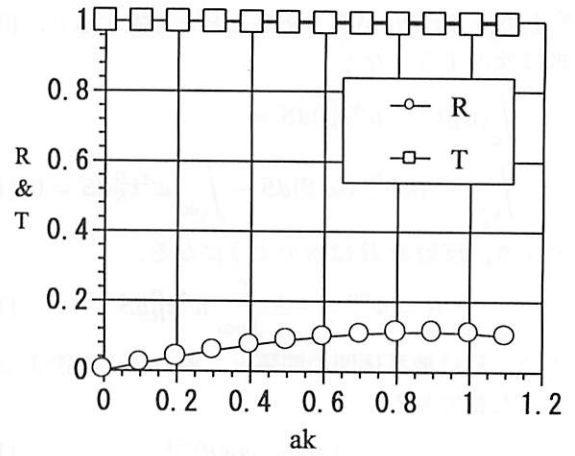


Fig.4 Reflection (R) and transmission (T) coefficients ($b/a = c/a = 5.0$)

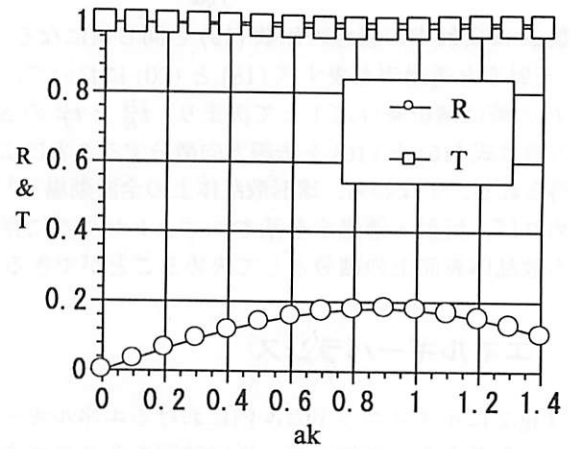


Fig.5 Reflection (R) and transmission (T) coefficients ($b/a = c/a = 4.0$)

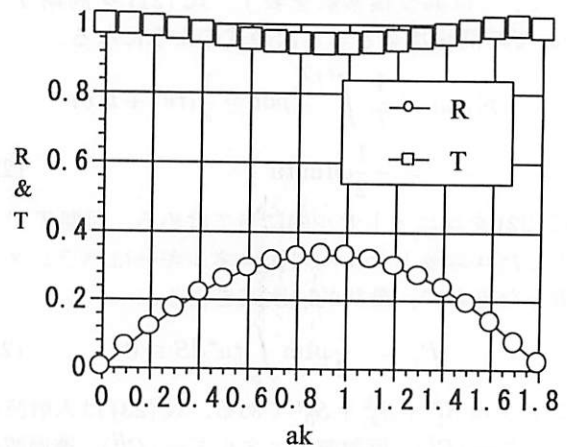


Fig.6 Reflection (R) and transmission (T) coefficients ($b/a = c/a = 3.0$)

7.3 反射率と透過率の精度

5節で示した反射率と透過率の関係式(24)を用いて、前節の結果の精度を確認する。Table.1にそれぞれのアレー状散乱体の周期構造間隔において、波数を変えたときの反射・透過率と式(24)との誤差を示す。全ての場合において誤差は1%以下となっており、仮想波動場を導入することにより反射率と透過率を決定する本研究の数値解析手法の精度が確認できる。

Table.1 Accuracy of reflection and transmission coefficients

b/a	ak	R	T	誤差(%)
3.0	0.5	0.260	0.966	0.007
3.0	1.0	0.332	0.944	0.035
3.0	1.5	0.191	0.983	0.179
4.0	0.4	0.118	0.993	0.012
4.0	0.8	0.179	0.984	0.028
4.0	1.2	0.151	0.989	0.142
5.0	0.3	0.058	0.998	0.006
5.0	0.6	0.099	0.995	0.009
5.0	0.9	0.113	0.994	0.069

7.4 波動モードによる散乱体表面上の波動場の変化

6節に示した境界積分方程式(26)を用いて各境界要素上で数値積分を行い、数値解析した結果をFig.7からFig.12に示す。図中の四角が球形散乱体表面上の波動場 u を表している。Fig.7からFig.9は球形散乱体の周期間隔が $b/a = 3.0$ (カットオフ波数 $ak = 2.06$) の場合、Fig.10からFig.12は球形散乱体の周期間隔が $b/a = 5.0$ (カットオフ波数 $ak = 1.26$) の場合である。Fig.7とFig.10は1次モードのカットオフ波数手前の波数における波動場、Fig.8とFig.11は1次モードのカットオフ波数近傍における波動場、Fig.9とFig.12は1次モードのカットオフ波数より少し大きな波数における波動場である。2つの周期構造間隔において、0次モードにおける波動場の形態と1次モードにおける波動場の形態が変化していることが認められる。波数を推移させてその波動場の形態を見ていくと、0次モードにおいては入射波の振幅の1周辺に波動場が分布しているのに対して、1次モードでは反射波方向(図では下側)に波動場が大きくなっていて、透過波方向(図では上側)の波動場が小さくなっている。これより球形散乱体の周期構造によらず、それぞれの波動モードは固有の形態を持っていて、高次のモードの波が含まれると反射波方向に波動場が大きくなっている。またカットオフ波数の近傍では特異な現象が認められ、2重周期構造の間隔が狭いFig.8では入射波の振幅の5倍以上の値が見られる。

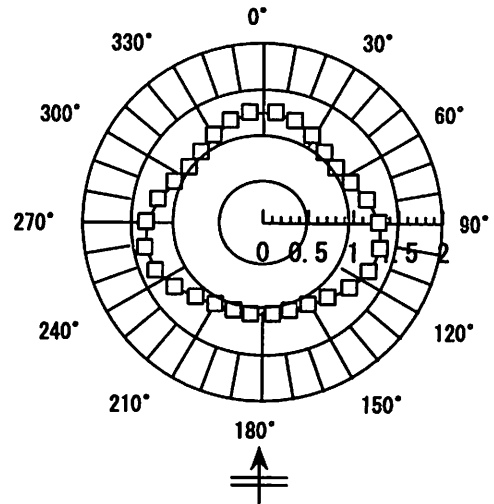


Fig.7 Wave field u for periodic structure ($ak=1.5, b/a=3.0$)

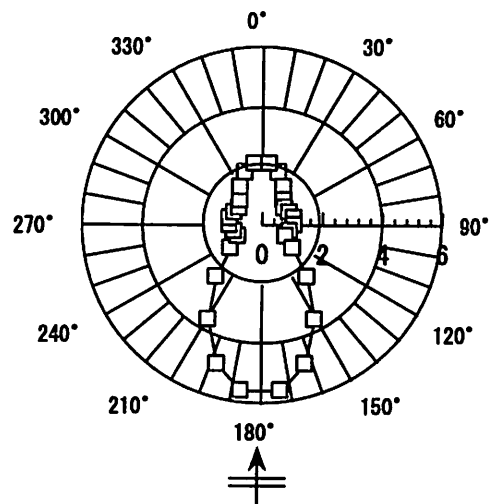


Fig.8 Wave field u for periodic structure ($ak=2.06, b/a=3.0$)

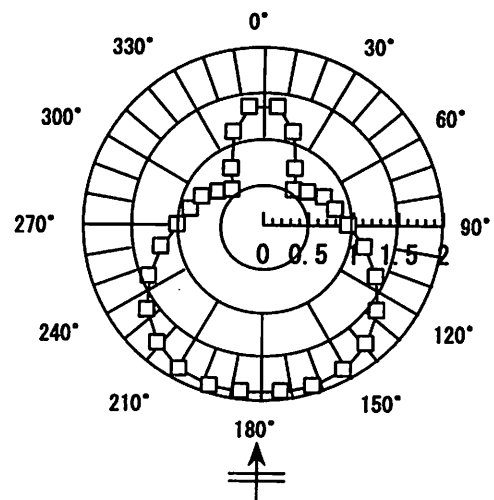


Fig.9 Wave field u for periodic structure ($ak=2.4, b/a=3.0$)

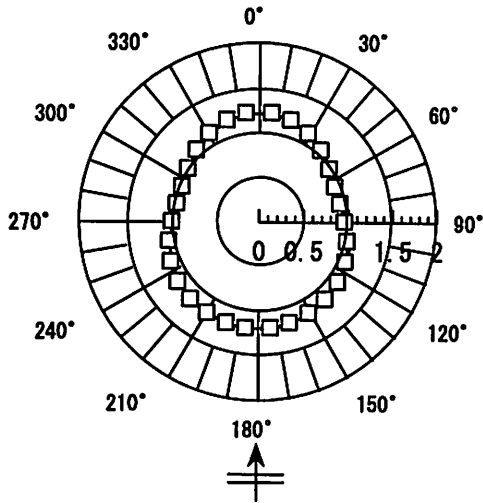


Fig.10 Wave field u for periodic structure
($ak=1.1, b/a=5.0$)

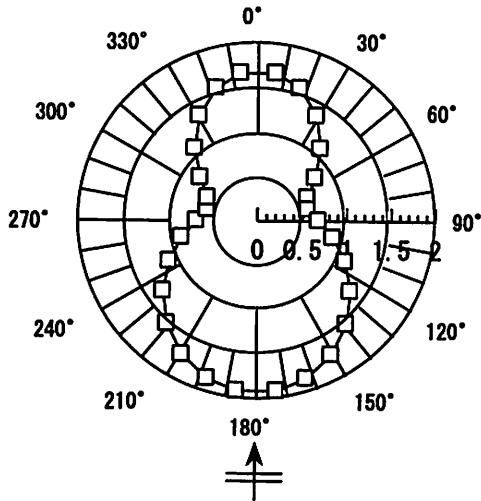


Fig.11 Wave field u for periodic structure
($ak=1.26, b/a=5.0$)

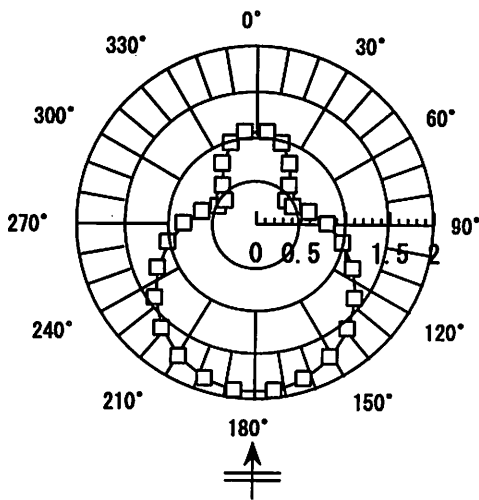


Fig.12 Wave field u for periodic structure
($ak=1.3, b/a=5.0$)

8. おわりに

本論文では、2重周期構造を有する平面アレー状に配置された球形散乱体に対する散乱問題の反射率と透過率の表現式を示し、反射率と透過率は散乱体表面上の実波動場と仮想系による波動場の法線方向微分量の積分として表されることを示した。また、エネルギーバランスを考慮することにより解析手法の精度を確認し、1次モードのカットオフ波数周辺の波数に対応する球形散乱体表面上の波動場の特徴を明らかにした。現段階においては、0次の波動モードに対応した反射率と透過率だけしか示しておらず、現実的なより大きい波数域についても、散乱場の表現をもとにして反射率・透過率を定式化し数値解析を行っていくことが今後の課題である。

参考文献

- 1) Kinra, V.K., Maslov, K., Henderson, B.K. and Diderich, G.: Acoustic response of a layer of spherical inclusions with a random or periodic arrangement, *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, 17(1998), pp.41-48.
- 2) Henderson, B.K., Kinra, V.K. and Maslov, K.: Acoustic response of a layer of spherical inclusions with a hexagonal or square periodic arrangement, *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, 18(1999), pp.143-150.
- 3) Achenbach, J.D. and Kitahara, M.: Reflection and transmission of an obliquely incident wave by an array of spherical cavities, *J. Acoust. Soc. Am.*, 80(1986), pp.1209-1214.
- 4) Ewald, P.P.: Die Berechnung optischer und elektrostatischer getterpotentiale, *Annalen der Physik*, 64(1921), pp.253-287.
- 5) Jordan, K.E., Richter, G.R. and Sheng, P.: An efficient numerical evaluation of Green's function for the Helmholtz operator on periodic structures, *Journal of Computational Physics*, 63(1986), pp.222-235.
- 6) 中川克也, 北原道弘: 周期構造を有する散乱体解析のための基本解に関する検討, 境界要素法論文集, 15(1998), pp.1-6.
- 7) 山田将紀, 北原道弘, 中川克也: アレー状散乱体による反射・透過解析への高速収束型基本解の適用, 境界要素法論文集, 16(1999), pp.121-126.