

境界要素法における計算点解析法の 多領域問題への適用：第2報

神谷紀生¹⁾，許松青²⁾，鈴木崇之³⁾

APPLICATION OF COMPUTING POINT METHOD IN BEM TO MULTIPLE DOMAIN PROBLEMS: Second Report

N.Kamiya, S.Q.Xu and T.Suzuki

¹⁾名古屋大学情報文化学部 〒464-8601 名古屋市千種区 E-mail:b41861a@nucc.cc.nagoya-u.ac.jp

²⁾トヨタシステムリサーチ(株) 〒464-8601 名古屋市東区

³⁾名古屋大学大学院人間情報学研究科 〒464-8601 名古屋市千種区

As the second report of a series of study on the application of the computing analysis method to multiple region problems, we here consider a combination of linear region with nonlinear region. For this case, the computing point analysis method is applied to the nonlinear region alone. However, the solution on a interface boundary is not known in advance and therefore an iterative computation is required starting from an assumed initial value thereon. Solution scheme and computation example are shown for the potential-type two-dimensional problem, which validated potentiality of the computing point analysis as well as the mentioned iterative solution scheme.

Key Words: Boundary Element Method, Computing Point Method, Inhomogeneous/ Nonlinear Problem, Multiple Domain

1 はじめに

著者らは、非線形あるいは非同次問題を境界だけの離散化によって解析する境界要素法の「計算点解析法(Computing Point Method)」[3-5]と名づける方法を提案した。この方法は、従来このための方法として知られていた「二重相反法(DRM)」[1]あるいは「多重相反法(MRM)」[2]とは違ったもので、構成される方程式が特異にならない特徴をもっている。種々の非線形問題に適用して、その有効性が示された。

多重領域への計算点解析法の適用が前報[6]で試みられた。全体領域について同一の非線形支配方程式を用い、2つの部分領域に分けた場合を取り上げた。本報告では、線形方程式に支配される領域と非線形方程式に支配される領域とが結合された問題を考えることにする。線形領域においては境界条件が規定されれば、境界要素解は決定されるが、この問題では非線形領域との界面すなわち内部境界において境界条件があらかじめわかっていないので、初期推定値から反復計算が行われる。もちろん、非線形領域については計算点解析法による反復計算が必要である。したがって、

上記2種類の反復計算によって解を得ることになる。ラプラス作用素に関連する2次元問題を例にとり、解析法を示し、例題による検討を行う。

2 線形領域と非線形領域の結合問題

解析対象の全体領域 Ω が線形部分領域 Ω^1 と非線形部分領域 Ω^2 の結合されたものとして与えられる問題を考える。いずれの部分領域も内部境界 Γ^i をのぞいて境界条件があらかじめ与えられている。したがって、内部境界で境界条件が指定されれば、個々の部分領域の解を決定することができる。もちろん非線形部分領域には計算点解析法を用いれば、要素を用いた離散化は境界要素分割だけで処理できる。

内部境界での境界条件は通常、連続条件と適合条件である。ラプラス作用素に関連するポテンシャル問題ではつぎのように与えられる：

$$\begin{aligned} u &= v \\ q &= -p \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 u, v は各部分領域でのポテンシャルであり、その境界法線方向の導関数を q, p とおいてある。

内部境界における変数の値はあらかじめわからないので、この解析においては、つぎのような反復計算を行って、収束値に到達する方法を用いる：

- 1) 線形領域 Ω^1 における内部境界 Γ^{11} 上の未知数 u を仮定する。
- 2) 領域 Ω^1 における解析を線形問題に対する通常の境界要素法によって行い、すべての境界上の u および q を求める。 Γ^{11} 上では q が求まる。
- 3) 内部境界 Γ^1 では $p = -q$ が成り立つので、領域 Ω^2 における内部境界 Γ^{12} 上の p が定まる。
- 4) 非線形領域 Ω^2 における解析を計算点法によって行い、すべての境界上の p および v を求める。 Γ^{12} 上では v が求まる。
- 5) 内部境界上で先に仮定した u と v との差が十分小さければ計算を終了する。そうでなければ、6) へ続く。
- 6) 再び Γ^{11} 上では、 $u = v$ が成り立つので、 Ω^1 側の内部境界 Γ^{11} 上の u が求まる。
- 7) Γ^{11} について先に仮定した値を u 、 Γ^{12} で求められた値を v として、6) のように新たに Γ^{11} での u を v によって直接定めると収束性が悪くなることがある。そこで v を直接用いず、先の u に、 $(u - v)$ にある係数 α (加速係数あるいは減速係数) をかけた量を加える方法が一般的であるので、以下ではこれを用いることにする。2) へ戻って計算を続ける。

3 計算結果と検討

Fig. 1 のような2つの部分領域を結合した問題を考える。左側の線形領域 Ω^1 の支配方程式を

$$\nabla^2 u = 0 \quad (2)$$

右側の非線形領域 Ω^2 の支配方程式を

$$\nabla^2 v - 12\sqrt{y}\sqrt{v} = 0 \quad (3)$$

とする。なお、境界条件は Fig. 1 に示すように仮定する。このとき解析解は

$$u = 4xy - 3y \quad (4)$$

$$v = x^4 y \quad (5)$$

となり、また式(3)の非線形項 b は次のようになる。

$$-12\sqrt{y}\sqrt{v} = -12x^2 y (= b) \quad (6)$$

境界要素としては直線で表される線形要素を用い、各辺ごとに10個の要素によって離散化する(合計境界要素数 $n=40$)。境界計算点(BCP)は等間隔に20点 ($\bar{n}=20$)とし、非線形部分領域 Ω^2 について内部計算点(ICP)は9点 ($m=9$)とした。また、収束条件は内部境界上の各選点における u と v との差の絶対値のすべての内部境界上の節点での和が 10^{-10} 以下とする。他の計算条件の場合も含めて、Fig. 2 に境界節点および内部計算点の配置を示す。

上記の計算条件で領域 Ω^1 の内部境界上の初期値を $u=1$ 、加速係数を0.3として得られた結果を Figs. 3, 4 および Table 1 に示す。ただし、Figs. 3, 4 の横軸は(a), (a')の場合、領域 Ω^1 における点(0, 1)からの矢印の向きの境界上の長さ(S)であり、(b), (b')の場合、領域 Ω^2 における点(2, 0)からの矢印の向きの境界上の長さ(S')である。この結果は27回の反復計算により得られた。図および表に厳密解と比較されているように、妥当な結果を得ることができることがわかる。上記の計算における非線形領域に対する計算点解析法の収束性を Fig. 5 に示した。ここに示したのは、点(1.5, 0.5)における非線形項 b の値(厳密解は13.5)と、 b の多項式表示の係数 c_7 ($x^2 y$ の係数)である。 b の厳密解は式(6)のようであるので、 c_7 は-12が厳密解である。図に示されるように、反復計算の早い段階で正しい値に近づいていることがわかる。

計算条件として、領域 Ω^2 の内部計算点 m 、内部境界上であらかじめ仮定する u の値、加速係数 α の値などのとり方を変えることが考えられる。その検討例を Fig. 6 に対数表示により反復計算前後の u の変化量として示した。Fig. 6 (a'')は m を変えた場合であり、内部計算点の配置は $m=9$ と同様に Ω^2 内に等間隔に行われている。この図に示すように、 m は大きい影響を与えないことがわかる。したがって、内部計算点は少なくてもよいことがわかる。Fig. 6 (b'')は初期値を変えて得られたものである。 $u=1$ 、10 および厳密解を用いた場合を取り上げた。反復計算の収束性(図の曲線の傾き)はほとんど変わらないが、絶対値は違うことがわかる。加速係数(あるいは減速係数) α の影響は(c'')に示すように極めて顕著である。なお α は試行的に用いた値であるが、この値のとり方により、反復計算が収束しない場合もあるので、この決定の方法、収束可能な α の範囲を検討することが今後の問題として残された。

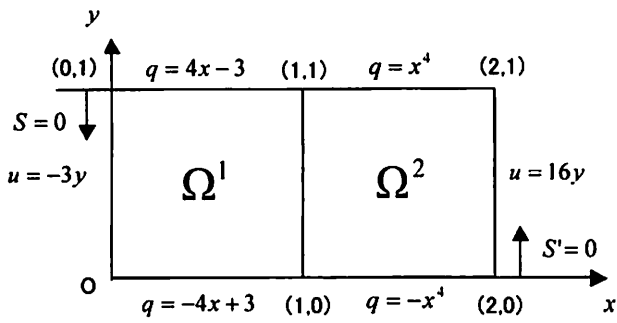
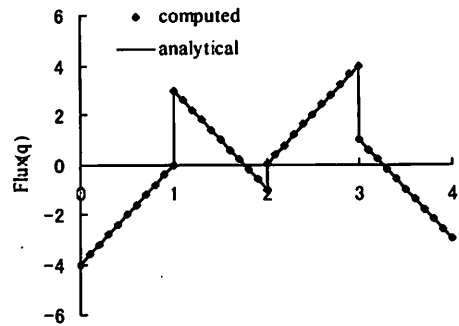
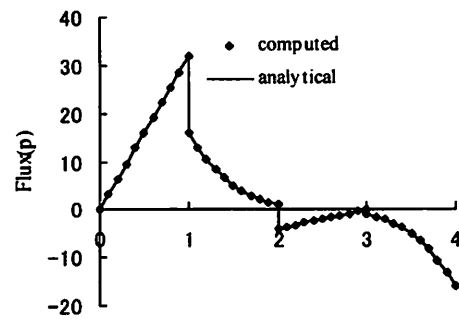


Fig. 1 Problem considered



Boundary length(S)

(a')



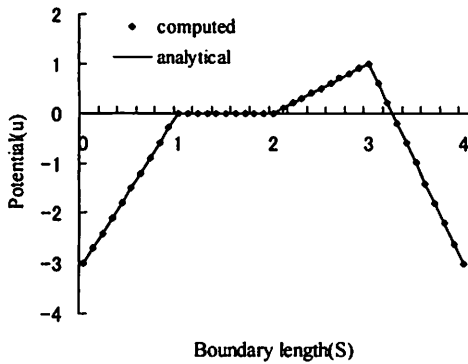
Boundary length(S)

(b')

Fig. 4 Results of (a') q and (b') p

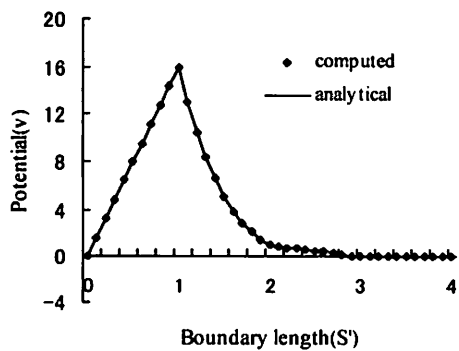
Table 1 Results and errors of u and q

x	y	u	Error of u	q	Error of q
1	0	1.67E-03	1.67E-03	2.23E-03	2.23E-03
1	0.1	1.02E-01	1.51E-03	3.96E-01	4.30E-03
1	0.2	2.02E-01	1.76E-03	7.99E-01	1.47E-03
1	0.3	3.02E-01	2.15E-03	1.20E+00	4.00E-04
1	0.4	4.03E-01	2.63E-02	1.60E+00	-8.60E-04
1	0.5	5.03E-01	3.20E-03	2.00E+00	-2.22E-03
1	0.6	6.04E-01	3.83E-03	2.40E+00	-3.84E-03
1	0.7	7.05E-01	4.53E-03	2.81E+00	-6.68E-03
1	0.8	8.05E-01	5.27E-03	3.21E+00	-7.56E-03
1	0.9	9.06E-01	5.95E-03	3.64E+00	-3.64E-02
1	1	1.00E+00	3.54E-03	3.96E+00	3.74E-02



Boundary length(S)

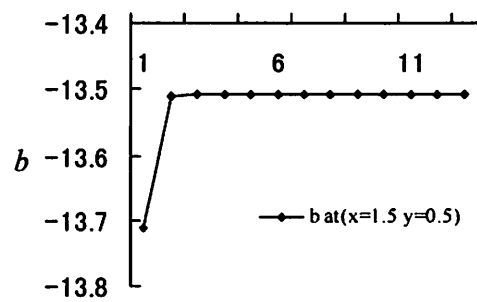
(a)



Boundary length(S')

(b)

Fig. 3 Results of (a) u and (b) v



Iteration No.

(a'')

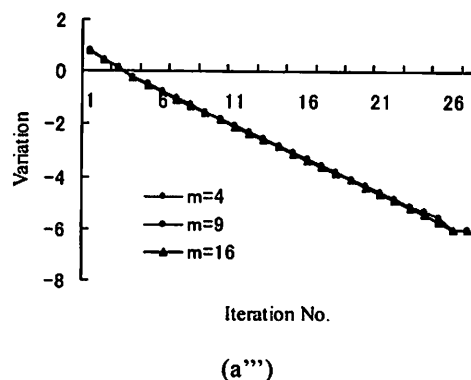
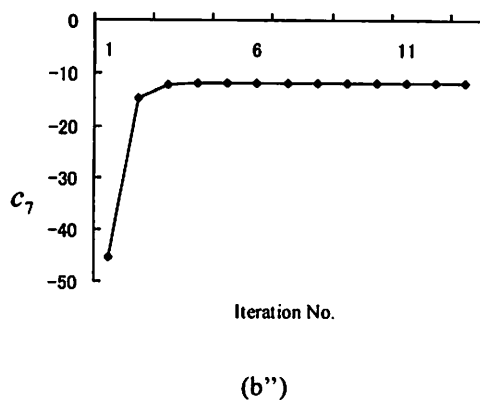


Fig. 5 Convergences of (a'') b , (b'') c_7 during iteration

4 まとめ

本研究では多領域問題のうち、解析対象の全体領域が線形部分領域と非線形部分領域の結合された場合に計算点解析法が有効であることを検討した。例題の解析により、 u の初期値にかかわらず収束回数が少なく、また精度の高い解が得られた。さらに多くの領域に分けられる場合あるいは各部分領域の特性が異なる場合に関してはひきつづき検討する予定である。

5 文献

1. P. W. Partridge, C. A. Brebbia, and L. C. Wrobel, *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, Comp. Mech. Pub., 1992
2. A. J. Nowak and A. C. Neves, eds., *The Multiple Reciprocity Boundary Element Method*, Comp. Mech. Pub., 1994
3. 神谷・許, 非同次・非線形問題に対する境界要素解析の一定式と解法, 日本機械学会論文集 (A), Vol.64, pp. 147-154, 1998
4. 許・神谷, 非同次・非線形問題に対する境界要素の一定式と解法 (続報: 未知関数の導関数を含む非同次項の場合), 日本機械学会論文集(A), Vol. 64, pp. 1341-1347, 1998
5. 許・神谷, 計算点解析法による境界要素法のためのアダプティブ境界要素, 日本機械学会論文集 (A), Vol.64, pp. 1598-1595, 1998
6. 神谷・許・鈴木, 境界要素法における計算点解析法の多重領域問題への応用, BEM テクノロジーコンファレンス論文集, Vol. 10, pp. 23-28, 2000.

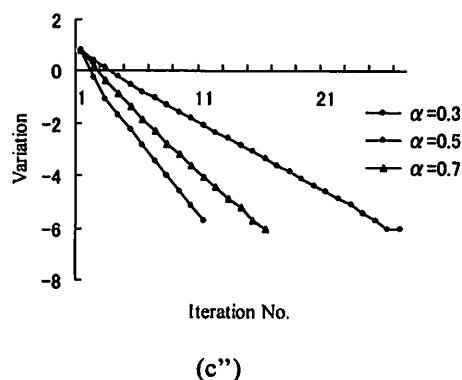
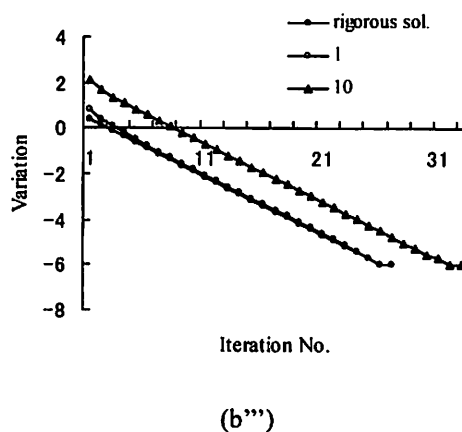


Fig. 6 Iterations (a'') for different numbers of ICP, (b'') for different initial assumption and (c'') for different α