

Trefftz法を用いた3次元ポアソン方程式の解法

TREFFTZ SOLUTION OF THREE-DIMENSIONAL POISSON EQUATION

北 英輔¹⁾, 本多圭太²⁾, 池田洋一³⁾, 神谷紀生³⁾

Eisuke KITA, Keita HONDA, Yoichi IKEDA and Norio KAMIYA

- 1) 名古屋大学情報科学研究科 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町, E-mail: kita@is.nagoya-u.ac.jp)
 2) 名古屋大学情報科学研究科 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町, E-mail: keita@ipl.human.nagoya-u.ac.jp)
 3) 大同工業大学 (〒457-8530 名古屋市南区滝春町, E-mail: ikeda@daidoh-it.ac.jp)
 3) 名古屋大学情報科学研究科 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町, E-mail: b41861a@cc.nagoya-u.ac.jp)

This paper describes the application of the Trefftz method to the solution of the non-linear Poisson equation. The inhomogeneous term containing the unknown function is approximated by a polynomial in the Cartesian coordinates to determine the particular solution for the Poisson equation. The solution of the problem is approximated with the superposition of the Trefftz functions of the Laplace equation and the particular solution. Unknown parameters included in the approximate solution are determined so that the solution satisfies the boundary conditions. The present scheme is applied to some examples in order to study the numerical properties.

Key Words: Trefftz Method, Computing Point Analysis Scheme, 3D Poisson Equation

1. はじめに

Trefftz法はTrefftz関数を用いた境界型数値解析法であり、1926年にTrefftzにより初めて提案された⁽¹⁾。同じ境界型数値解析法である境界要素法(境界積分方程式法)が特異性のある基本解を用いるのに対して、Trefftz法で用いるTrefftz関数は特異性を有しないので、Trefftz法の定式化は境界要素法よりも簡単となる。Trefftz法の理論的な研究は主にHerreraら⁽²⁾によって、工学的な応用研究についてはCheungら^(3,4)、神谷ら⁽⁵⁾、Zielinskiら⁽⁶⁾などによって研究が進められている。ところで、これまでの研究では、Trefftz法をポテンシャル問題^(3,6)や2次元弾性問題⁽⁴⁾など同次方程式に支配される問題に主として適用してきた。これに対して、著者らは以前の研究^(7,8)においてTrefftz法を2次元Poisson方程式の境界値問題に適用した。本論文では、以前に提案した方法を拡張し、3次元ポアソン方程式の境界値問題の解析法について述べる。

本論文で提案する方法は以下のものである。まず、ポアソン方程式の非同次項を未知関数を含んだままで3次の完全多項式で近似し、それに対応する特解を導出する。続いて、特解を用いてポアソン方程式の境界値問題をラプラス方程式の境界値問題に変換する。ラプラス方程式の境界値問題は同次方程式の境界値問題に対するTrefftz解法によって容易に解かれるので、その結果と特解より元の問題の解を評価する。論文の最後では、提案する方法を非同次項が未知関数を含む

ポアソン方程式の数値解法に適用し、解析結果を厳密解と比較することで有効性を検討する。

本論文の構成は以下のようになっている。提案する方法では、特解を用いて非同次方程式の境界値問題を同次方程式の境界値問題に変換する。そこで、第2節では同次方程式である3次元Laplace方程式の境界値問題に対するTrefftz解析法について述べる。第3節では、3次元Poisson方程式の境界値問題に対するTrefftz解析法について述べる。第4節では、提案した解析法をいくつかの解析例に適用する。第5節は、本論文で得られた結論をまとめる。

2. 3次元Laplace方程式の境界値問題に対するTrefftz法

2.1. 選点法による定式化

3次元ポテンシャル問題の支配方程式と境界条件は次式で与えられる。

$$\nabla^2 u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \quad (\text{on } \Gamma_1) \\ q \left(\equiv \frac{\partial u}{\partial n} \right) &= \bar{q} \quad (\text{on } \Gamma_2) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

また、 Ω は解析対象領域を、 Γ_1, Γ_2 はポテンシャル u の指定境界、フラックス q の指定境界を示す。また n は境界での単位法線ベクトルを、 $(\bar{\quad})$ は指定境界条件値を示す。

Treftz 法では支配方程式を満足する T-complete 関数によって解を線形近似する (T-complete 関数については後述する)。式 (1) の T-complete 関数を u_i^* とすると、ポテンシャル u は次のように近似される。

$$u \simeq \bar{u} = a_1 u_1^* + a_2 u_2^* + \cdots + a_N u_N^* \equiv \mathbf{a}^T \mathbf{u}^* \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}^T$ は未知定数ベクトルを、 $(\bar{\quad})$ は近似解を示す。また、 N は近似に用いる T-complete 関数の総数である。この式を境界の法線方向に偏微分すれば境界でのフラックス q の近似式を得る。

$$q \simeq \bar{q} \left(\equiv \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right) = a_1 q_1^* + a_2 q_2^* + \cdots + a_N q_N^* \equiv \mathbf{a}^T \mathbf{q}^* \quad (4)$$

式 (3) と (4) は支配方程式を満足するが境界条件は満足しない。そこで、式 (3) と (4) を式 (2) に代入すると残差が生じる。つまり、

$$\begin{aligned} R_1 &\equiv \bar{u} - u = \mathbf{a}^T \mathbf{u}^* - \bar{u} \neq 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \\ R_2 &\equiv \bar{q} - q = \mathbf{a}^T \mathbf{q}^* - \bar{q} \neq 0 \quad \text{on } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (5)$$

Treftz 法では境界条件を近似的に満足するように係数ベクトル \mathbf{a} を定める。選点法による定式化では、境界上にとった選点 P_m での残差を 0 とおく。つまり、式 (5) より

$$\begin{aligned} R_1(P_m) &= \mathbf{a}^T \mathbf{u}^*(P_m) - \bar{u}(P_m) = 0 \\ &\quad (P_m \text{ on } \Gamma_1, m = 1 \dots, M_1) \\ R_2(P_m) &= \mathbf{a}^T \mathbf{q}^*(P_m) - \bar{q}(P_m) = 0 \\ &\quad (P_m \text{ on } \Gamma_2, m = 1 \dots, M_2) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 M_1, M_2 はそれぞれ Γ_1, Γ_2 上にとられた選点の総数である。上式を整理すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T \mathbf{u}^*(P_m) &= \bar{u}(P_m) \quad (P_m \text{ on } \Gamma_1) \\ \mathbf{a}^T \mathbf{q}^*(P_m) &= \bar{q}(P_m) \quad (P_m \text{ on } \Gamma_2) \end{aligned} \quad (7)$$

これをマトリクス表示すると、

$$\begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & \cdots & u_{1N}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & \cdots & u_{2N}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{M_1 1}^* & u_{M_1 2}^* & \cdots & u_{M_1 N}^* \\ q_{11}^* & q_{12}^* & \cdots & q_{1N}^* \\ q_{21}^* & q_{22}^* & \cdots & q_{2N}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{M_2 1}^* & q_{M_2 2}^* & \cdots & q_{M_2 N}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_{M_1} \\ \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \vdots \\ \bar{q}_{M_2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

ここで

$$\begin{aligned} u_i^*(P_m) &\equiv u_{mi}^* \\ q_i^*(P_m) &\equiv q_{mi}^* \\ \bar{u}(P_m) &\equiv \bar{u}_m \\ \bar{q}(P_m) &\equiv \bar{q}_m \end{aligned}$$

である。上式を次のように表す。

$$K \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (9)$$

上式は未知数よりも方程式の個数の多い連立方程式となるので、LAPACK ソフトウェア (9) の特異値分解で解くことで未知数を決定する。

2.2. T-complete 関数

3次元ポテンシャル問題の T-complete 関数は支配方程式を球座標系について変数分離することで求められ、3次元閉領域について次のように与えられる (10)。

$$u^* = \left\{ r^\nu \sqrt{\frac{(2\nu+1)(\nu-\mu)!}{4\pi(\nu+\mu)!}} P_\nu^\mu(\cos\theta) e^{j\mu\phi} \right\} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots; -\nu-1 < \mu < \nu+1) \quad (10)$$

ここで、 r, θ, ϕ は原点を任意にとった球座標系の座標値であり、 j は虚数単位を示す。また、 P_ν^μ は Legendre 陪関数である。Herrera (11, 12) や Zielinski ら (6) は、上記の関数もしくはこれから定数を除いた関数

$$u^* = \left\{ r^\nu P_\nu^\mu(\cos\theta) e^{j\mu\phi} \right\} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots; -\nu-1 < \mu < \nu+1) \quad (11)$$

を T-complete 関数として提示している。本研究では、式 (11) のようにとられた T-complete 関数を用いて解析を行う。

最後に、定式化で用いる T-complete 関数の法線方向微分を示す。

$$\begin{aligned} q^* \equiv \frac{\partial u^*}{\partial n} &= \left\{ \nu r^{\nu-1} P_\nu^\mu(\cos\theta) e^{j\mu\phi} n_r \right. \\ &\quad \left. + r^\nu \frac{\partial P_\nu^\mu(\cos\theta)}{\partial \theta} e^{j\mu\phi} n_\theta \right. \\ &\quad \left. + j\mu r^\nu P_\nu^\mu(\cos\theta) e^{j\mu\phi} n_\phi \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで

$$\frac{\partial P_\nu^\mu(\cos\theta)}{\partial \theta} = \frac{(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(\cos\theta) - (\nu+1)\cos\theta P_\nu^\mu(\cos\theta)}{\sin\theta} \quad (13)$$

であり、 n_r, n_θ, n_ϕ は境界での単位法線の r, θ, ϕ 方向成分を示す。また、式 (13) で与えられる T-complete 関数の法線方向微分を用いて線形近似したフラックスの近似解は、この式から分かるように $\theta = 0$ で発散してしまうので、 $\theta = 0$ となるところには選点をらない。

3. 3次元 Poisson 方程式の境界値問題に対する Treftz 法

3.1. 3次元 Poisson 方程式の境界値問題

この場合、支配方程式と境界条件は次式で与えられるものを考える。

$$\nabla^2 u + b(x, y, z, u) = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u} \quad (\text{on } \Gamma_1) \\ q &= \bar{q} \quad (\text{on } \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

本論文では式 (14) を Poisson 方程式と呼んでいる。

3.2. 支配方程式の変換

最初に、非同次項 b を直交座標系 x, y, z の 3 次完全多項式を用いて近似する。つまり、

$$\begin{aligned} b &= c_1 + c_2x + c_3y + c_4z + \cdots + c_{20}z^3 \\ &= \mathbf{c}^T \mathbf{r} \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 \mathbf{c} と \mathbf{r} は未知パラメータベクトルと完全多項式の各項から成るベクトルであり、それぞれ次式で与えられる。

$$\mathbf{c}^T = \{c_1, c_2, \dots, c_{20}\} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^T &= \{1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz, \\ & x^3, y^3, z^3, x^2y, x^2z, xy^2, \\ & xz^2, xyz, y^2z, yz^2\} \end{aligned} \quad (18)$$

そして、 \mathbf{c} は未知関数 u の関数となる。式 (16) を用いると支配方程式は次式に変換される。

$$\nabla^2 u + \mathbf{c}^T \mathbf{r} = 0 \quad (19)$$

式 (19) の同次解を u^h 、 r_i に対応する特解を u_i^p とすれば、境界値問題の解 u は次式で近似される。

$$u = u^h + \mathbf{c}^T \mathbf{u}^p \quad (20)$$

ここで、 \mathbf{r} は完全多項式の項からなるベクトルなので、特解 u_i^p を求めることは比較的容易である。上式を用いれば、式 (14) と (15) で与えられる境界値問題は次式に変換される。

$$\nabla^2 u^h = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} u^h &= \bar{u} - \mathbf{c}^T \mathbf{u}^p \quad (\text{on } \Gamma_1) \\ q^h &= \bar{q} - \mathbf{c}^T \mathbf{q}^p \quad (\text{on } \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

この場合未知パラメータ \mathbf{c} は未知関数であるポテンシャル u の関数となり、あらかじめ定めることができないので収束計算が必要である。つまり、最初に \mathbf{c} を仮定して解析を行い、得られた u から非同次項を計算して、式 (16) を満足するように未知パラメータを変更することになる。この方法について以下で説明する。

3.3. 未知パラメータの更新法

繰り返し計算 (k) と ($k+1$) 回目について、式 (16) を考えると次式となる。

$$\begin{aligned} b(x, y, z, u)^{(k+1)} &= \mathbf{r}^T \mathbf{c}^{(k+1)} \\ b(x, y, z, u)^{(k)} &= \mathbf{r}^T \mathbf{c}^{(k)} \end{aligned}$$

左辺と右辺をそれぞれ引き算すると次式となる。

$$\begin{aligned} b^{(k+1)} - b^{(k)} &= \mathbf{r}^T (\mathbf{c}^{(k+1)} - \mathbf{c}^{(k)}) \\ &\equiv \mathbf{r}^T \Delta \mathbf{c} \end{aligned} \quad (23)$$

そして、境界上と領域内に取られた計算点において式 (23) を選点法的に満足するように $\Delta \mathbf{c}$ を決定する。つまり、計算点 Q_i について式 (23) を考えると

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^T(Q_i) \Delta \mathbf{c} &= b^{(k+1)} - b^{(k)} \\ &= b(u(Q_i^{(k)})) - \mathbf{r}^T \mathbf{c}^{(k)} \\ &\equiv \Delta b(Q_i) \end{aligned} \quad (24)$$

ここで、 $b^{(k)}$ は境界値問題を解く前の近似値を意味するので次式で評価する。

$$b^{(k)} = \mathbf{r}^T \mathbf{c}^{(k)}$$

これに対して、 $b^{(k)}$ は境界値問題を解いて求めた各点での関数値 $u(Q_i^{(k)})$ から評価するので、次式で評価する。

$$b^{(k+1)} = b(u(Q_i^{(k)}))$$

全ての計算点 Q_i で式 (24) を考えて連立方程式とすると次式になる。

$$\mathbf{D} \Delta \mathbf{c} = \mathbf{f} \quad (25)$$

ここで \mathbf{D} と \mathbf{f} は、それぞれ完全多項式の項から成る行列と非同次項に関する係数ベクトルである。式 (25) を特異値分解⁽¹³⁾ によって解いて $\Delta \mathbf{c}$ を決定し、それを用いて \mathbf{c} を次式で更新する。

$$\mathbf{c}^{(k+1)} = \mathbf{c}^{(k)} + \Delta \mathbf{c} \quad (26)$$

収束判定条件を次式のように定義する。

$$\eta \equiv \frac{1}{M_c} \sum_{i=1}^{M_c} |\Delta b(Q_i)| < \eta_c \quad (27)$$

ここで、 η_c はユーザーによって定義された正の定数である。

3.4. 解析アルゴリズム

アルゴリズムを示すと以下ようになる。

1. $k \leftarrow 0$ として、 \mathbf{c}^0 を仮定する。
2. 式 (21) と式 (22) で与えられる境界値問題を解き、計算点での非同次項を計算する。
3. 収束判定を行う。条件を満足すれば結果を出力し、満足しなければ次へ進む。
4. 連立方程式 (25) を解いて $\Delta \mathbf{c}$ を決定する。
5. \mathbf{c} を更新して k をインクリメントし、2. へ進む。

4. 解析例

4.1. 例題 1

解析領域 Ω は 1 辺が $2m$ であるような立方体領域であり、原点は重心にとることとする。従って、8 つの面はそれぞれ平面 $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm 1$ となる。

最初の例題として、支配方程式が次式で与えられる場合を考える。

$$\nabla^2 u + \frac{\pi^2}{8} u = 0$$

境界条件は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) & y = 1 \text{ 平面上} \\ u &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) & y = -1 \text{ 平面上} \\ q &= 0 & \text{他の平面上} \end{aligned}$$

この問題の解析解は次式で与えられる。

$$u^{ex} = \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}y\right)$$

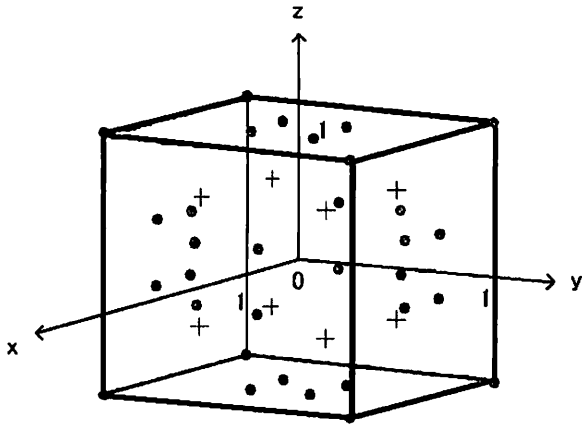


Fig. 1 Object under consideration

Table 1 Coordinates of collocation points

Internal collocation points ($M_c = 52$) (0.5,0,0),(0,0.5,0),(-0.5,0,0),(0,-0.5,0)
Internal collocation points ($M_c = 56$) (0.5,0.5,0.5),(-0.5,0.5,0.5),(-0.5,-0.5,0.5),(0.5,-0.5,0.5),(0.5,0.5,-0.5),(-0.5,0.5,-0.5),(-0.5,-0.5,-0.5),(0.5,-0.5,-0.5)
Internal collocation points ($M_c = 64$) (0.25,0.25,0.25),(-0.25,0.25,0.25),(-0.25,-0.25,0.25),(0.25,-0.25,0.25),(0.25,0.25,-0.25),(-0.25,0.25,-0.25),(-0.25,-0.25,-0.25),(0.25,-0.25,-0.25),(0.75,0.75,0.75),(-0.75,0.75,0.75),(-0.75,-0.75,0.75),(0.75,-0.75,0.75),(0.75,0.75,-0.75),(-0.75,0.75,-0.75),(-0.75,-0.75,-0.75),(0.75,-0.75,-0.75)

解析のために、境界上に選点を48個等間隔に配置する。また、それ以外に内点をそれぞれ4,8,16個配置する場合を比較する。内点を16個用いる場合の境界点と内点の配置を図1に示す。解析に用いた内点の座標を表1に示す。計算点としては全ての境界点と内点をとる。また、パラメータ c_i の初期値は全て0とする。

η の収束状況を図2に示す。 M_c は計算点の総数を示し、これは境界選点と内点の総数に等しい。横軸には繰り返し計算の回数を、縦軸には η の値をとり、異なる内点数での収束特性の違いを比較する。これより、 η は内点数によらず2回程程度の繰り返し計算で、それぞれ収束していることが分かる。また、内点数が少ないほど η の最終的な値は小さいことが分かる。次に、全ての計算点における未知関数の数値解と理論解の差の2乗ノルムで定義された誤差指標 E_u の収束状況を図3に示す。横軸には繰り返し計算の回数を、縦軸には E_u の値をとり、異なる内点数での収束特性の違いを比較する。この場合も η と同じく、 E_u は6回程程度の繰り返し計算で収束しているが、この場合は内点数が多いほど最終的な精度が

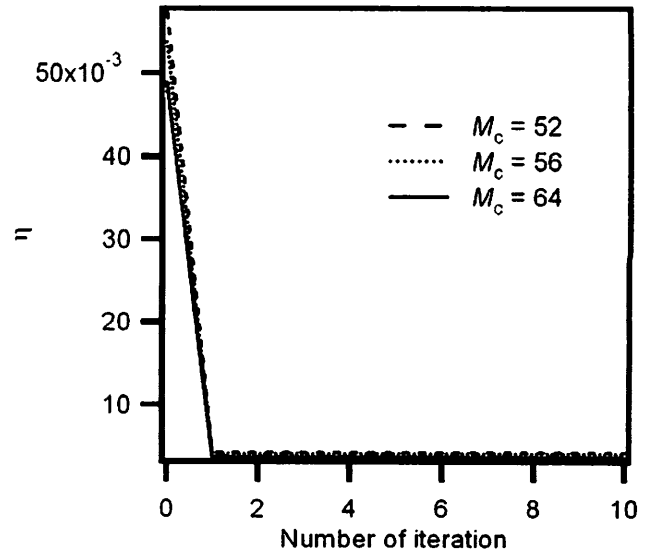


Fig. 2 Convergence property of η

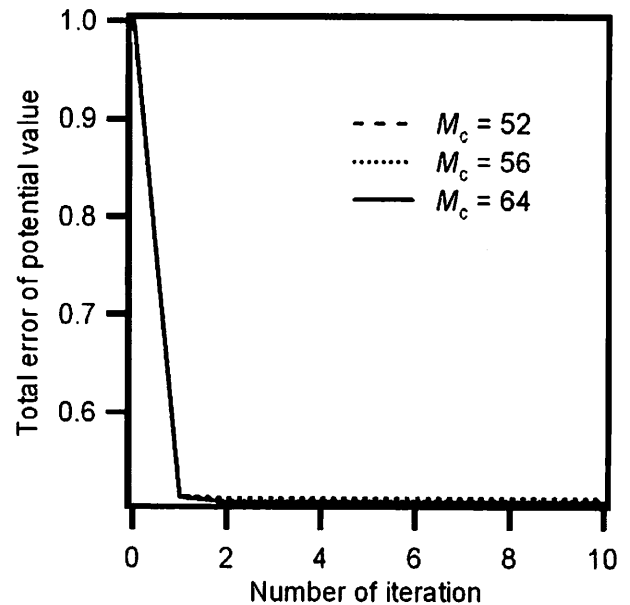


Fig. 3 Convergence property of E_u

良いことが分かる。内点16個で解析を行い、十分収束したときの u の分布を図4に示す。横軸には、精度評価点の x 座標を取り、縦軸には u の値を取る。線は理論解を、記号は提案した方法で求めた数値解を示す。このグラフより、繰り返し計算0回では理論解と数値解にずれがみられるが、十分収束すれば数値解は理論解と良く一致していることが分かる。

4.2. 例題2

次の例題として、支配方程式が次式で与えられる場合を考える。

$$\nabla^2 u + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

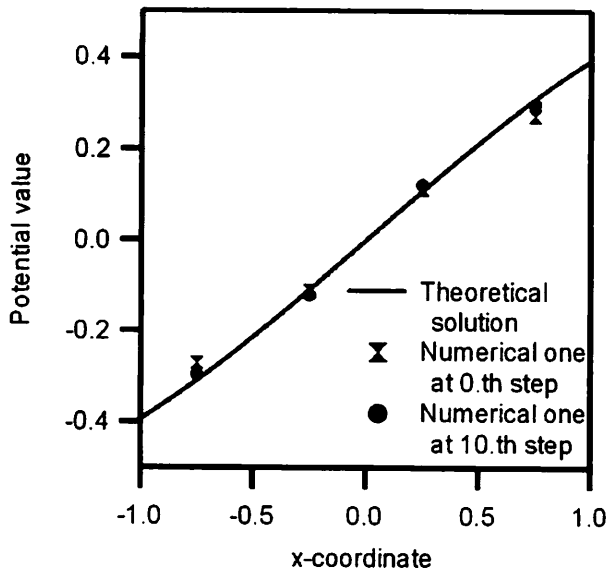


Fig. 4 Distribution of potential value ($M_c = 64$)

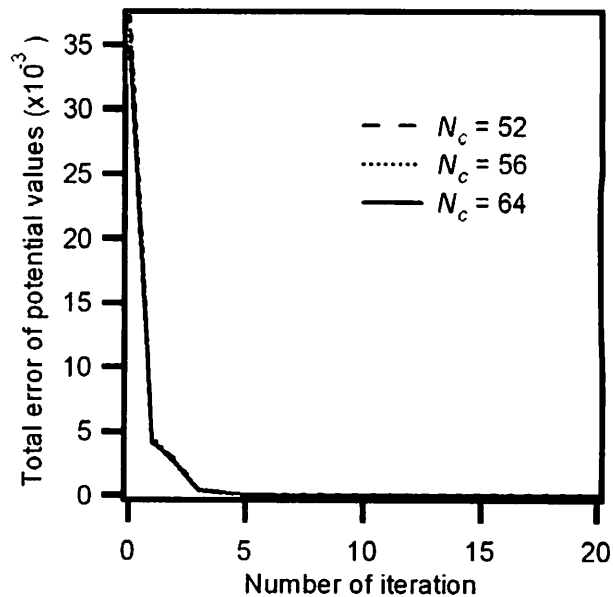


Fig. 6 Convergence property of E_u

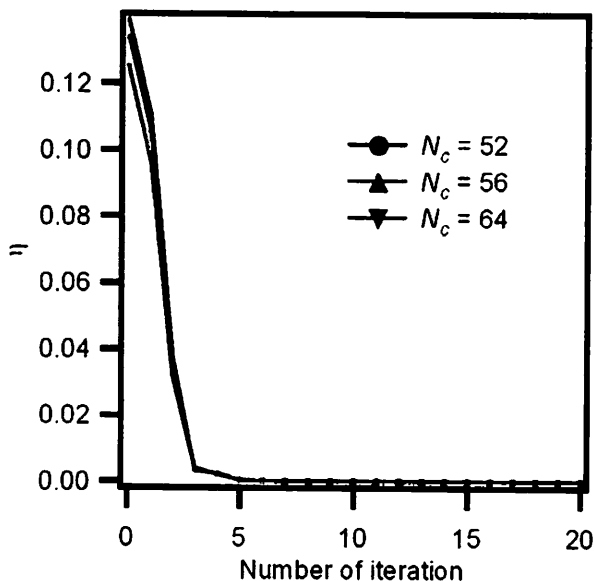


Fig. 5 Convergence property of η

境界条件は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} u &= 1 && x = 1 \text{ 平面上} \\ u &= -1 && x = -1 \text{ 平面上} \\ q &= 0 && \text{他の平面上} \end{aligned}$$

解析のために、境界上に選点を48個等間隔に配置する。また、それ以外に内点をそれぞれ4, 8, 16個配置する場合を比較する。内点を16個用いる場合の境界点と内点の配置を図1に示す。計算点としては全ての境界点と内点をとる。また、パラメータ c_i の初期値は全て0とする。

η の収束状況を図5に示す。 M_c は計算点の総数を示し、これは境界選点と内点の総数に等しい。横軸には繰り返し計算の回数を、縦軸には η の値をとり、異なる内点数での収束

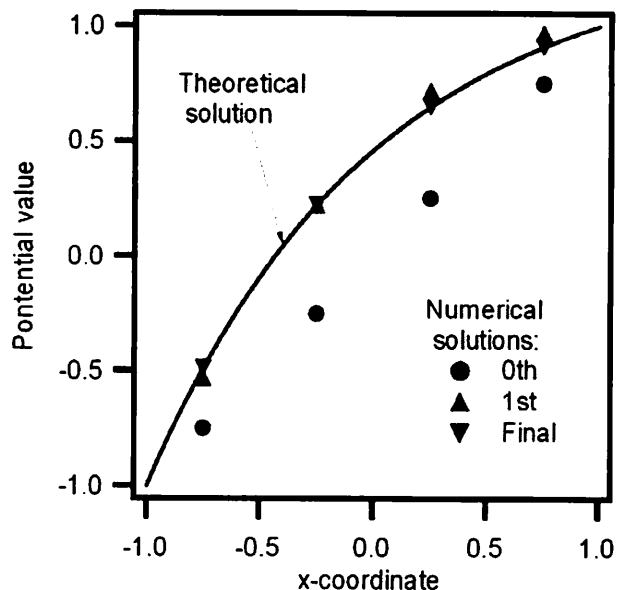


Fig. 7 Distribution of potential value ($M_c = 64$)

特性の違いを比較する。これより、 η は内点数によらず5から10回程度の繰り返し計算で収束している。図6には、全ての計算点における未知関数の数値解と理論解の差の2乗ノルムで定義された誤差指標 E_u の収束状況を示す。これにより、内点の個数によらず誤差も5回ほどの繰り返し計算で収束していることがわかる。図7には未知関数の分布を示す。横軸には、精度評価点の x 座標を取り、縦軸には u の値を取る。線は理論解を、記号は提案した方法で求めた数値解を示す。このグラフより、繰り返し計算0回では理論解と数値解に大きなずれがみられるが、十分収束すれば数値解は理論解と良く一致していることが分かる。

5. まとめ

本研究では、3次元ポアソン方程式の境界値問題に対する Trefftz 法の定式化法について提案した。Trefftz 法は支配方程式を満足する非特異な Trefftz 関数を用いる解析法である。Trefftz 法をポアソン方程式の数値解析に適用する場合、非同次項の形によって Trefftz 関数を導出することが一般的に困難であるため、適用が困難であった。この問題を解消するために、本研究では以下のような方法を提案した。まず、非同次項を3次までの完全多項式で近似した。そして、完全多項式の各項を非同次項とするポアソン方程式を考え、そのポアソン方程式に対する特解を用いて、最初のポアソン方程式をラプラス方程式に変換して解析した。

解析対象として、非同次項が未知ポテンシャルを含む場合を考え、解法の特性について検討した。内点数が増えるほど数値解の精度は高くなることが確認できた。

最後に提案した方法の検討課題について少し述べておきたいと思う。まず、非同次項の近似には3次の完全多項式を用いているが、非同次項の形によっては3次では十分に近似できないことが予想される。そこで、今後はより高次の近似関数を用いる方法について検討したい。また、未知関数を T-complete 関数の重ね合わせで近似した後、それを微分して法線導関数の近似式を得ているが、これによって導関数の近似精度が低下する可能性がある。これについても、今後検討を加えたいと思う。

参考文献

- (1) E. Trefftz. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. *Proc. 2nd Int. Cong. Appl. Mech., Zurich*, pp. 131–137, 1926.
- (2) I. Herrera. Theory of connectivity: A systematic formulation of boundary element methods. In C. A. Brebbia, editor, *New Developments in Boundary Element Methods (Proc. 2nd Int. Seminar on Recent Advances in BEM, Southampton, England, 1980)*, pp. 45–58. Pentech Press, 1980.
- (3) Y. K. Cheung, W. G. Jin, and O. C. Zienkiewicz. Direct solution procedure for solution of harmonic problems using complete, non-singular, Trefftz functions. *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 5, pp. 159–169, 1989.
- (4) W. G. Jin, Y. K. Cheung, and O. C. Zienkiewicz. Application of the Trefftz method in plane elasticity problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 30, pp. 1147–1161, 1990.
- (5) N. Kamiya and S. T. Wu. Generalized eigenvalue formulation of the Helmholtz equation by the Trefftz method. *Engineering Computations*, Vol. 11, pp. 177–186, 1994.
- (6) A. P. Zielinski and O. C. Zienkiewicz. Generalized finite element analysis with T-complete boundary solution

function. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 509–528, 1985.

- (7) 北英輔, 池田洋一, 神谷紀生. Trefftz 法による非線形ポアソン方程式の解法. *情報処理学会論文誌*, No. 7, 2002.
- (8) 池田洋一, 北英輔, 神谷紀生. Element-free Trefftz 法によるポアソン方程式の境界値問題の解法 (非同次項に未知関数の導関数を含む場合). *日本シミュレーション学会論文集*, Vol. 21, No. 1, pp. 57–64, 2002.
- (9) 小国力. 行列計算パッケージ LAPACK 利用の手引き. 丸善, 第2版, 1995. (E. Anderson et al. eds, *LAPACK User's Manual*).
- (10) J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., 1 edition, 1962.
- (11) I. Herrera. Trefftz method. In C. A. Brebbia, editor, *Topics in Boundary Element Method*, Vol. 1, chapter 10. Springer Verlag, 1984.
- (12) I. Herrera. *Boundary Methods: An Algebraic Theory*. Pitman, 1984.
- (13) E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, S. Ostrouchov, and D. Sorensen. *LAPACK User's Manual*. SIAM, 2nd edition, 1995.