

薄板極限の境界積分方程式の安定したBEM解法策について

A Stable BEM Solution For Boundary Integral Equation
Of Infinitesimally Thin Solid Plate佐川 明朗¹⁾

Akio SAGAWA

1) 鉄道総研技術研究所 空力音響研究室 (〒513-0013 坂田郡米原町梅ヶ原 E-mail:saga@rtri.or.jp)

The boundary integral equation for acoustical wave potential difference between two sides of an infinitesimally thin solid plate includes a sum of a divergent term and a divergent integral. This paper presents a useful method to compute such a sum of two divergent terms and, hence, the coefficient matrix components. As a result, a stable BEM solution can be found for the boundary integral equation of infinitesimally thin solid plate. These methods are applied to the computation of the amplification of sound pressure by a parabola reflector in a wide frequency range when the direction of the incident sound wave is parallel to the axis of the reflector.

Keywords: Infinitesimally thin solid plate, Boundary element method, Parabola reflector

1. はじめに

到来音の波長に比べて厚みの十分薄い反射板による反射音場を計算する場合、反射板の厚みが無限に薄いものとして、反射板両面のポテンシャル差に関する境界積分方程式を境界要素法(BEM)によって解く方法が既に提案されている¹⁾。薄板極限における境界両面のポテンシャル差に関する境界積分方程式は、超特異積分を含むものとなるが、超特異積分を直接数値的に評価する方法は、一般の超特異積分について Guiggiani ら^{2),3)} によって与えられている。

本研究においては、薄板極限における境界両面のポテンシャル差をBEMにより解くにあたり、安定した計算手法を提示する。その際、超特異積分の計算は線型の連立方程式の解を求める行列計算の前に完了させる方法を示した上で、行列計算に際しては解の安定化に寄与する係数行列の与え方ができることを示す。適用例として、パラボラ音響反射板の増幅特性において、低周波域と高周波域の中間に位置する過渡周波数域で顕著に現れる極大極小現象を解析し、実測値との比較検証結果などを通じて本計算手法の有効性を示す。

2. ポテンシャル差に関する境界積分方程式

剛体板とみなされる場合の音響反射板における両境界面上のポテンシャル差 $\phi_-(x)$ に関する境界積分方程式は、次のように与えられる¹⁾。

$$\int_{S_1} \phi_-(x) \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial n(x) \partial n(y)} dS(y) + \frac{\partial \phi_P(x)}{\partial n(x)} = 0 \quad (1)$$

ここで、境界面 S_1 側および境界面 S_2 側における境界値を $\phi_1(x)$ および $\phi_2(x)$ と表し、 $\phi_-(x) \equiv \phi_1(x) - \phi_2(x)$ であり、 $\psi(x, y) \equiv \exp(-ikr)/4\pi r$, $r \equiv |x - y|$, $k \equiv 2\pi f/c_0$, f : 周波数, c_0 : 音速とする。 $\phi_P(x)$ は入射波のポテンシャル

であり、法線方向微分は境界面 S_1 側において外向きを正にとっている (Fig. 1)。ポテンシャル差に関する境界積分は片側 (S_1 側) のみにおいて行う。

次に、境界面 S_1 を点 x の近傍の領域 S_ϵ とそれ以外の領域 S_0 に分ける。 S_ϵ は x を中心とし半径 r_ϵ の球で切取られる面とし、 r_ϵ を十分小さくとることにより事実上円形のように扱うことができる。(1)式では、 $\partial/\partial x_j = -\partial/\partial y_j$ であるので、

$$\int_{S_\epsilon + S_0} n_j(x) n_m(y) \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y_j \partial y_m} \phi_-(y) dS(y) = \frac{\partial \phi_P(x)}{\partial n(x)} \quad (2)$$

(2)式の左辺の積分で、 S_ϵ における積分の主要項は $\gamma_\epsilon \phi_-(x)$ の形に書くことができ、 γ_ϵ は Fig.2 のように、 S_ϵ を半径 r_ϵ の円、 h を点 x から S_ϵ までの距離とし、 $h \rightarrow 0$ の極限をとったときの積分値により与えられる。すなわち、

$$\begin{aligned} \gamma_\epsilon &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} n_j(x) n_m(y) \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y_j \partial y_m} dS(y) \\ &= \frac{1}{2} \left(ik + \frac{\exp(-ikr_\epsilon)}{r_\epsilon} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

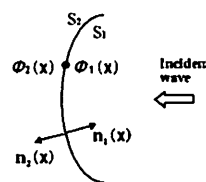


Fig. 1 Schematic cross section of infinitesimally thin solid plate

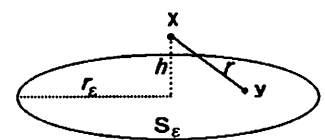


Fig. 2 Integral surface for an infinitesimally small height (h) and radius (r_ϵ)

(3)式の極限值が r_ϵ の大きさに拘わらず成立するためには $h^2/r_\epsilon^3 \rightarrow 0$ が必要である。 S_ϵ の形状における曲率の影響や面内の $\phi_-(y)$ が厳密には一定でないことを考慮に入れた場合は、結果として $\gamma_\epsilon \phi_-(x)$ に r_ϵ のオーダー $O(r_\epsilon)$ の項が付加されるだけであり、 $r_\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとる場合には寄与しない項となり省略できる。一方、 $r_\epsilon \rightarrow 0$ のとき $\exp(-ikr_\epsilon)/r_\epsilon$ および S_0 における積分は発散し、(2)式は超特異積分を含む次式のように表される。

$$\lim_{r_\epsilon \rightarrow 0} \left[\gamma_\epsilon \phi_-(x) + \int_{S_0} n_j(x) n_m(y) \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y_j \partial y_m} \phi_-(y) dS(y) \right] = \frac{\partial \phi_P(x)}{\partial n(x)} \quad (4)$$

本論文においては、後述するように、(4)式における超特異積分の計算をBEM解法における行列計算から分離して行う方法を検討する。ポテンシャル差 $\phi_-(x)$ がわかれば、外部点 x における反射波のポテンシャル $\phi(x)$ は、片側の境界面 S_1 における積分により求められる。すなわち、

$$\phi(x) = \phi_P(x) + \int_{S_1} \phi_-(y) \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial n(y)} dS(y) \quad (5)$$

3. BEM解法を適用する境界積分方程式の導出

(4)式において、 $\phi_P(x)$ が平面波による入射波である場合、 θ_x を境界面上の点 x における境界面の法線方向と入射波の入射方向とのなす角度とすると、右辺は $ik\phi_P(x)\cos(\theta_x)$ で表される。また、 $\Psi_0(x, y)$ を次のように定義する。

$$\Psi_0(x, y) = \frac{2}{ik} n_j(x) n_m(y) \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y_j \partial y_m} \quad (6)$$

$\Psi_0(x, y)$ は次のように表すことができる。

$$\Psi_0(x, y) = \frac{C_1(x, y)\psi'_0 + C_2(x, y)(ikr\psi_0)'}{2\pi r} \quad (7)$$

ここで、 α_0 をベクトル $n_j(x)$ とベクトル $n_m(y)$ のなす角度、 α_1 をベクトル $n_j(x)$ とベクトル $y-x$ とのなす角度、 α_2 をベクトル $n_m(y)$ とベクトル $x-y$ とのなす角度とし、

$$C_1(x, y) = \cos\alpha_0 + 3\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \quad (8)$$

$$C_2(x, y) = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \quad (9)$$

$$\psi_0(r) = \exp(-ikr)/ikr \quad (10)$$

とおいた。(7)式中のダッシュは r に関する微分を表す。なお、 α_2 については、 $0 < \alpha_2 < \pi$ の範囲にあるものとする。(4)式全体を $ik/2$ で除算すると、

$$\lim_{r_\epsilon \rightarrow 0} \left[\left\{ 1 + \frac{\exp(-ikr_\epsilon)}{ikr_\epsilon} \right\} \phi_-(x) + \int_{S_0} \Psi_0(x, y) \phi_-(y) dS(y) \right] = 2\phi_P(x) \cos(\theta_x) \quad (11)$$

この(11)式は $\phi_-(x)$ に関する積分方程式であるが、次のように定義される $\zeta(x)$ に関する積分方程式も考えることができる。

$$\zeta(x) = \frac{\phi_-(x)}{2\phi_P(x) \cos(\theta_x)} \quad (12)$$

(11)式および(12)式から $\zeta(x)$ に関する積分方程式は、

$$\lim_{r_\epsilon \rightarrow 0} \left[\left\{ 1 + \frac{\exp(-ikr_\epsilon)}{ikr_\epsilon} \right\} \zeta(x) + \int_{S_0} \Psi_1(x, y) \zeta(y) dS(y) \right] = 1 \quad (13)$$

ただし、 $\Psi_1(x, y)$ は以下のように与えられる。

$$B^*(x, y) = \frac{\cos(\theta_y) \phi_P(y)}{\cos(\theta_x) \phi_P(x)} \quad (14)$$

$$\Psi_1(x, y) = \Psi_0(x, y) B^*(x, y) \quad (15)$$

本論文においては、(13)式の $\zeta(x)$ について安定的に解が得られるBEM計算法を提示することとし、このあとからは、一旦 $\zeta(x)$ を求めてから $\phi_-(x)$ を計算する方法について述べる。(11)式の $\phi_-(x)$ を直接求める方法は同様にしてできるので、その提示は省略する。 $\zeta(x)$ を求める方法を選択する理由の一つは、位相項である $\phi_P(x)$ が除かれるため、 $\phi_-(x)$ と比べ $\zeta(x)$ の方が高周波域での空間的な変動が小さくなりやすいものと期待されることによる。

(11)式あるいは(13)式は、超特異積分を含む積分方程式である。これらの式をそのまま離散化してBEM解法を適用する方法は、 kr_ϵ が1より小さくなるほど積分計算の離散化による計算誤差が解を不安定にする難点をもっている。そこで、本研究においては、超特異積分の計算をBEM解法における行列計算から分離して精度よく計算する方法と、行列計算に際して解の安定化に寄与する係数行列の与え方を検討した。その結果、具体的には、(13)式をBEMで解くにあたり、次のような計算手法を考案した。

① (13)式の左辺において、以下のように超特異積分項を移項して左辺第1項の $\zeta(x)$ の係数を一般的に有限で既知の関数で表されるようにする。

$$\lim_{r_\epsilon \rightarrow 0} \left[\left\{ 1 + \frac{\exp(-ikr_\epsilon)}{ikr_\epsilon} + \int_{S_0} \Psi_1(x, y) dS(y) \right\} \zeta(x) + \lim_{r_\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_0} \Psi_1(x, y) \{\zeta(y) - \zeta(x)\} dS(y) \right] = 1 \quad (16)$$

(16)式における左辺第1項の $\zeta(\mathbf{x})$ の係数を $\zeta^*(\mathbf{x})^{-1}$ とおく。
すなわち、

$$\zeta^*(\mathbf{x}) = \left[\lim_{r_\epsilon \rightarrow 0} \left\{ 1 + \frac{\exp(-ikr_\epsilon)}{ikr_\epsilon} + \int_{S_0} \Psi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \right\} \right]^{-1} \quad (17)$$

この $\zeta^*(\mathbf{x})$ は境界面の形状と入射条件が与えられれば、積分計算により求められる関数である。求めるべき点 \mathbf{x} の位置は、BEMで解くにあたり予め境界面を要素分割した各面要素の代表点とする。 $\zeta^*(\mathbf{x})^{-1}$ の計算にあたり解析的な方法など簡単な方法により得ることが難しい場合は、積分領域を要素分割し各要素内の代表点を選んでの積分計算を実行する。この場合は、発散項 $\exp(-ikr_c)/ikr_c$ を分布型の積分形に変換し、発散型の積分 $\int_{S_0} \Psi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \zeta(\mathbf{x}) dS(\mathbf{y})$ に含まれる発散因子を各計算点において取り除くような積分計算を行うようにする。この具体的な方法は次章で述べる。

② $\zeta^*(\mathbf{x})^{-1}$ を求めた後、次の積分方程式をBEMにより解く対象とする。

$$\zeta^*(\mathbf{x})^{-1} \zeta(\mathbf{x}) + \int_{S_0} \Psi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \{\zeta(\mathbf{y}) - \zeta(\mathbf{x})\} dS(\mathbf{y}) = 1 \quad (18)$$

(18)式左辺の積分面 S_0^* は $r_\epsilon \rightarrow 0$ のときの S_0 を表すものとする。その積分は一般的に収束し、(18)式は $\zeta^*(\mathbf{x})$ を補正して厳密解を求める積分方程式と解釈することができる。(18)式を離散化してBEMを適用する式は次式のようにする。

$$\zeta^*(\mathbf{x}_r)^{-1} \zeta(\mathbf{x}_r) + \sum_n K_{rn} \{\zeta(\mathbf{y}_n) - \zeta(\mathbf{x}_r)\} = 1 \quad (19)$$

係数 K_{rn} は各分割要素における積分評価値とし、各要素内の被積分関数 $\Psi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ および $\zeta(\mathbf{y})$ の値は一定値として扱う。(19)式から、係数行列の対角要素に入る係数は

$$\zeta^*(\mathbf{x}_r)^{-1} - \sum_{n=r} K_{rn} \text{のように与えられる。} \sum_{n=r} K_{rn} \text{は同じ行の}$$

非対角要素に入る係数の和であり、対角成分の定め方としてみると非対角成分との整合性がよく図られている方法となっている。このような係数行列の与え方によりBEM解の安定性が図られるものと考えられる。

4. 超特異積分の評価および計算法

前節においては、①で述べたように、 $\zeta^*(\mathbf{x})^{-1}$ の計算をBEM計算の前に完了させることを第1の課題とした。そこで、まず、 S_0 における面積分を距離 $r (=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)$ に関する積分で表してみる。それには、 l を r が一定の境界面上の線方向に沿った長さとするれば、 $dS = dl dr / \sin \alpha_2$ となるので、 l に関する線積分を行えばよい。線積分路全体を C_r とし、次のような線積分を定義する。

$$u(r) \equiv \int_{C_r} dl / 2\pi r \quad (20)$$

$$A_1^*(r) \equiv \int_{C_r} \frac{B^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) C_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\sin \alpha_2} dl / \int_{C_r} dl \quad (21)$$

$$A_2^*(r) \equiv \int_{C_r} \frac{B^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) C_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\sin \alpha_2} dl / \int_{C_r} dl \quad (22)$$

これらにより、 $\zeta^*(\mathbf{x})^{-1}$ は以下のように表される。

$$\zeta^*(\mathbf{x})^{-1} = 1 + \frac{\exp(-ikr_1)}{ikr_1} + \int_0^1 f(r) dr \quad (23)$$

$$f(r) \equiv \{u(r)A_1^*(r) - 1\} \left\{ \frac{e^{-ikr}}{ikr} \right\}' + u(r)A_2^*(r) \{e^{-ikr}\}' \quad (24)$$

(23)式で、 r_1 は各点 \mathbf{x} において r が最大になるときの値である。 r が0付近にあるとき、以下のような評価がなされる。

$$A_1^*(r) = 1 + O(r^2), \quad A_2^*(r) = O(r^2), \quad u(r) = 1 + O(r^2)$$

$A_1^*(r)$ および $A_2^*(r)$ は $r=0$ の近傍では、線積分路上の平均値を表すため r について1次(奇数次)の項が欠落している。従って、(24)式における $u(r)A_1^*(r) - 1$ は発散因子が相殺される項であり、結果として、 $r=0$ の近傍では、 $f(r) = O(1) + O(r^2)$ のように評価される。さらに、(23)式における積分を面積分表示に変更すると、

$$\int_0^1 f(r) dr = \int_{S_0^*} \frac{C_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_0' + C_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) B^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (ikr \psi_0)'}{2\pi r} dS \quad (25)$$

$$C_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv C_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) B^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sin \alpha_2 / u(r) \quad (26)$$

実際の計算は面積分で行う方がやりやすいとすると、(20)式で定義される $u(r)$ を計算し $\sin \alpha_2 / u(r)$ が発散因子を取り除く因子となる。次章では、 $\sin \alpha_2 / u(r)$ を各積分評価点において計算し、発散因子を取り除く計算を実施した解析例を提示する。

5. パラボラ音響反射板による増幅特性解析への適用

この章においては、パラボラ音響反射板に対する入射波が正面入射である場合、境界面の形状が軸対称であり、従って、解も軸対称になる場合の解析例を提示する。

まず、パラボラ反射面における $\zeta^*(\mathbf{x})^{-1}$ を計算してから、(19)式に基づいてBEMにより $\zeta(\mathbf{x})$ が求められたとすると、その $\zeta(\mathbf{x})$ を用いて、パラボラ反射面の焦点における直接音を除く反射音場 $\phi_{ref}(\mathbf{x})$ は、(5)式をもとにして次のように表される。

$$\begin{aligned} \phi_{ref}(x) &= \int_{S_1} \phi_-(y) \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial n(y)} dS(y) \\ &= 2h_0\phi_0 e^{-2ikh_0} \int_{h_0}^{h_1} \frac{1+ikr}{r^2} \sqrt{\frac{h_0}{r}} \xi_r dr \end{aligned} \quad (27)$$

(27)式で、積分変数 r は中心軸を含む平面内において焦点からパラボラ反射面までの距離を表し、 h_0 は焦点距離を、 h_1 は焦点から境界面の縁までの距離を、 ϕ_0 は焦点における入射波のポテンシャルを、 ξ_r は r の関数としての $\xi(x)$ をそれぞれ表す。従って、反射波および合成波の増幅倍率は、それぞれ、 $|\phi_{ref}/\phi_0|$ 、 $|1+\phi_{ref}/\phi_0|$ で表される。なお、高周波近似は、 θ_r を入射角とすると、(27)式で、 $\sqrt{h_0/r}\xi_r = \cos\theta_r\xi_r$ を 1 と置いたものである。

Fig.3 には、鉄道総研 (RTRI) の米原風洞に標準装備されている直径 1 m のパラボラ音響反射板 ($h_0=0.25\text{m}$, $h_1=0.5\text{m}$) について、正面入射波に対する増幅特性の BEM 計算値および実測値を示す。図中の kR ($R=0.5\text{m}$) に対応する実周波数はおよそ $kR \times 108\text{Hz}$ である。BEM による計算結果は軸対称を仮定した方法 (要素分割はリング状に行う。) により求めた ξ_r から、反射波のみおよび合成波の増幅倍率を求めた解析例を表している。また、積分計算における計算点の最小間隔を Δr とすると、 $k\Delta r$ は 0.01 程度を目途にして積分計算を実行した。その結果、得られた BEM による合成波の計算結果と実測値はよく一致していることが確認された。すなわち、計算は剛体仮定で行っているため、増幅特性における 200Hz 付近の顕著な極大および 400Hz 付近の顕著な極小現象は、反射波自身の増幅特性と入射波との干渉が相俟って著しく現れる現象であると結論される。また、 $\xi^*(x)$ の厳密解 $\xi(x)$ に対する近似の程度を見出すため、 $\xi(x)$ の代わりに $\xi^*(x)$ を用いて増幅特性を評価したグラフも示したが、 $\xi^*(x)$ を用いた場合

200Hz 付近から 400Hz 付近に至る極大極小現象をより顕著にしている。すなわち、 $\xi^*(x)$ は解の目安を与えるものとなっている一方、 $\xi(x)$ に対する補正はこの場合著しい極大極小現象を多少緩和する方向にはたらいっているものと理解される。このように、解の目安ともなり得る $\xi^*(x)$ を一旦求めてから BEM 計算により厳密解 $\xi(x)$ を得る方法は、安定した解の求法に十分役立つものであることが実証された。

6. 結言

本研究においては、薄板極限における境界面の表裏のポテンシャル差に関する境界積分方程式を解くにあたり、超特異積分の計算を行列計算の前に完了させる手法と、安定な BEM 計算に寄与する係数行列の与え方を示した。適用例として、パラボラ音響反射板の増幅特性において、低周波域から高周波域の中間に位置する過渡周波数域で顕著に現れる極大極小現象を解析し、実測値との比較検証結果などを通じて本計算手法の有効性を確認した。今後は、他の形状の反射板にも活用を図る予定である。

参考文献

- (1) 寺井俊夫：積分方程式による建築の音場計算に関する研究，京都大学 (学位論文，1978)
- (2) Guiggiani, M., Notes on Numerical Fluid Mechanics, W,Hackbusch, Vol.33,(1992), Vieweg, 23-34
- (3) Guiggiani, M., Krishnasamy, G., Rudolphi, T.J. & Rizzo, F.J., Trans. ASME, J.Appl.Mech, 59(1992), 604-614. W,Hackbusch, Vol.33,(1992), Vieweg, 23-34
- (4) 阪上公博, 杉本理恵, 高橋大武, 森本政之：有限要素法・境界要素法を用いた弾性平板による反射音場の数値解析，日本音響学会誌，48(1992)，pp.786-793

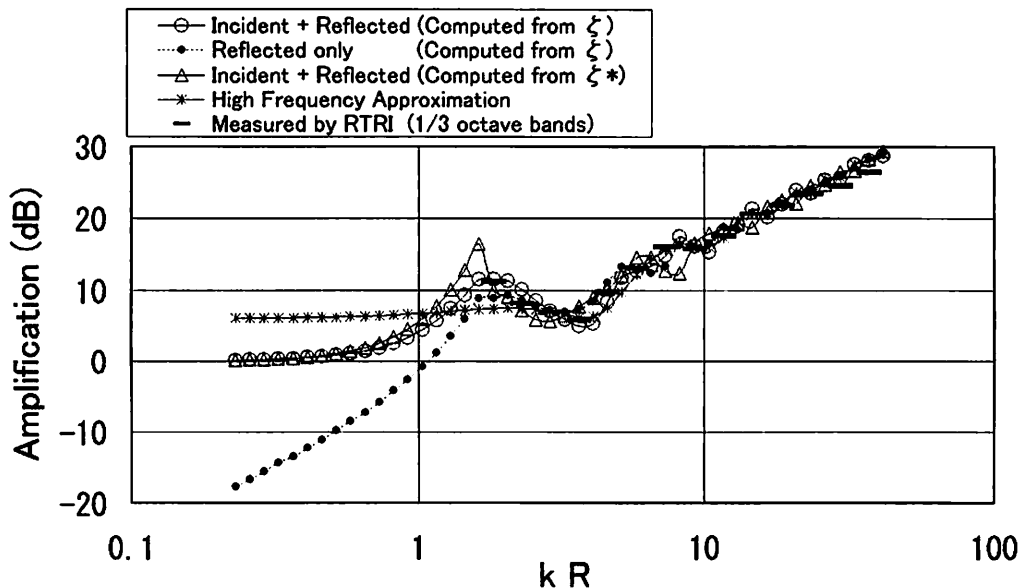


Fig. 3 Amplification of a reflected sound by the parabola reflector (R : radius of the reflector, $R = 0.5\text{m}$)