

直線梁で補強した直交異方性弾性板の静的曲げ変形問題に対する 境界要素法解析

BOUNDARY ELEMENT ANALYSIS FOR ELASTIC DEFORMATION OF ORTHOTROPIC PLATES STIFFENED BY STRAIGHT BEAMS

田中 正隆¹⁾, 松本 敏郎²⁾, 西口 貴啓³⁾

Masataka TANAKA, Toshiro MATSUMOTO and Takahiro NISHIGUCHI

- 1) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)
 2) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: toshiro@gipwc.shinshu-u.ac.jp)
 3) 信州大学大学院工学系研究科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: takahiro@artist.shinshu-u.ac.jp)

The present paper proposes an integral equation formulation for the elastostatic bending problem of stiffened orthotropic plates and its implementation by means of the boundary element method. In the so-called eccentrically stiffened orthotropic plate, where the neutral axis of stiffener does not exist in the neutral plane of the elastic plate, the in-plane and out-of-plane displacements are coupled. It implies that the out-of-plane bending and in-plane deformation of the plate should be considered as a coupled deformation with tensile, bending and twisting deformation of the stiffener. This paper deals with three components of the interactive force and two components of the interactive moment between the plate and the stiffener as line distributed unknown loads. For implementation of the resulting integral equations, isoparametric elements with quartic interpolations are used for discretization of the plate boundary, and constant elements for contact lines with stiffeners. The numerical results obtained by the computer code developed in this study are discussed, whereby usefulness of the proposed analysis method is demonstrated.

Key Words: Boundary Element Method, Numerical Analysis, Elastic Plate, Plate Bending, Stiffened Orthotropic Plate

1. はじめに

本研究では、弾性板に直線梁を接合した補強板の静的曲げ問題を境界要素法により解析する。境界要素法や境界積分方程式法による解析では、弾性板とリブとの接合面に作用する荷重をどのように評価するかで2つの手法に区別できる。すなわち、弾性板のたわみを用いて接合面の相互作用荷重を表す方法、及びそれらを未知量として扱う方法とに分けることができる。Hu-Hartley⁽¹⁾やTanaka-Bercin⁽²⁾は前者の手法に従い、補強線上での弾性板のたわみに対し、6次要素を用いて解析を行っている。Sapountzakis-Katsikadelis⁽³⁾やTanaka⁽⁴⁾は後者の手法に従い、等方性の弾性板について精度の良い解析が可能であることを確認している。特に著者ら⁽⁴⁾⁽⁵⁾の提案する手法は、接合線上に分布モーメントが作用することを仮定した高精度モデリングであって、弾性板境界とリブ接合線の離散化に任意の次数の要素を用いることができる。このため、高精度解析と効率的な解析手段を構築することができ

る。

Timoshenkoの弾性支持平板の理論⁽⁶⁾では、接合線に沿った弾性板横断面に生じる相当せん断力と曲げモーメントが、リブに対してそれぞれ分布力および分布モーメントとして作用するものとし、面外変形に対する定式化を行っている。補強板の曲げ問題を面外変形のみで定式化して解析するという事は、弾性板の中立面とリブの中立軸が一致していると仮定していることを意味する。弾性板およびリブの中立軸が一致しないときは、偏心に伴う分布モーメント荷重が作用するものとして考えなければならない。しかもこの場合、接合線上の線分布荷重を介して面外変形と面内変形が連成する問題となる。

そこで本報では以前、著者ら⁽⁴⁾⁽⁵⁾が補強等方性板を含む組立板構造について提案した境界要素解析法を拡張し、直交異方性板を直線はりで補強した構造物に対する解析法を確立する。開発した解析プログラムにより簡単な例題の計算結果

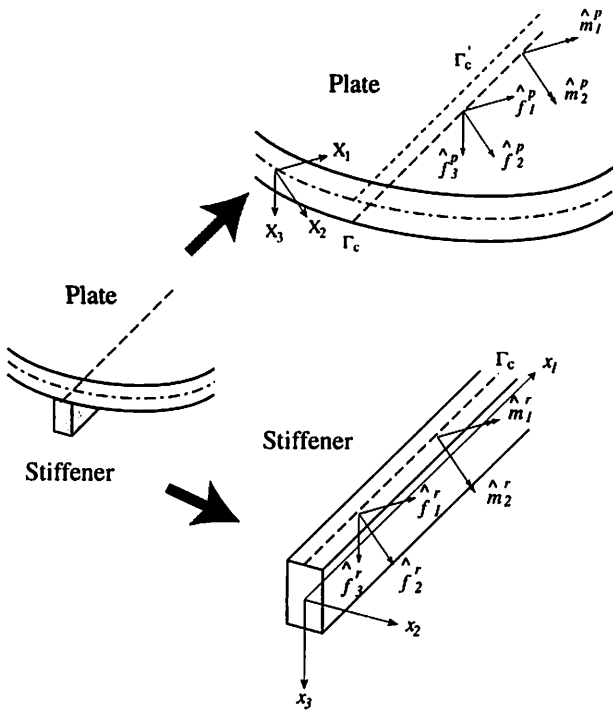


Fig.1 A model of an eccentrically stiffened plate

について比較検討を行い、本解法の妥当性を確かめる。

2. 理論

本研究では、Fig. 1 に示されるような補強板を考える。ただし X_1X_2 平面が弾性板中央面に一致するよう、またリブ横断面の図心軸に一致するよう x_1 軸を、 X_3 軸と x_3 軸が平行になるよう、右手系に従って座標系を決定する。本研究では、以下の仮定に基づいて定式化を行う。

- (i) 弾性板とリブは、ある一つの直線（接合線）において接合する。
- (ii) 弾性板は一様な直交異方性弾性体であり、Kirchhoff-Love の仮定に基づいた変形を生じる。
- (iii) リブは一様な二軸対称断面を持ち、リブの引張り変形、曲げ変形、およびねじり変形はそれぞれ独立に扱うことができる。
- (iv) 接合線における弾性板中立面に垂直な軸周りに作用するモーメントの効果は無視できる。すなわち、接合線で生じる各座標軸方向の線分布力 \hat{f}_i ($i = 1, 2, 3$) および線分布モーメント \hat{m}_i ($i = 1, 2$) を考慮する。

Timoshenko の理論⁽⁶⁾ のような偏心しない補強板の場合、面外変形と面内変形は独立に解析を行うことができる。ただしここで述べる面外変形とは、弾性板の曲げ変形、リブの x_3 軸方向への曲げ変形および x_1 軸まわりのねじり変形が連成する問題であり、面内変形とは弾性板の面内変形（平面応力状態）、リブの x_2 軸方向への曲げ変形および x_1 軸方向への引張り変形が連成する問題である。偏心を持つ補強板の解析においては、それぞれで連成問題となっている面内変形と面

外変形がさらに連成する問題となる。

弾性板およびリブそれぞれの中立面に対して偏心荷重として作用するため、これらの荷重を中立面に作用する荷重へと変換する必要がある。まず弾性板に対し、接合線 Γ_c 上で作用する荷重は、接合線 Γ_c の中立面 (X_1X_2 平面) への垂直射影 Γ_c' において、次のように表すことができる。

$$f_1^p = \hat{f}_1^p \quad (1)$$

$$f_2^p = \hat{f}_2^p \quad (2)$$

$$f_3^p = \hat{f}_3^p \quad (3)$$

$$m_1^p = \hat{m}_1^p - \alpha_3^p \hat{f}_2^p \quad (4)$$

$$m_2^p = \hat{m}_2^p + \alpha_3^p \hat{f}_1^p \quad (5)$$

ただし、 α_3^p は接合線の X_3 座標であり、通常は $\alpha_3^p = \pm h^p/2$ である。ただし h^p は弾性板の板厚である。一方リブに作用する荷重は、 x_1 軸において作用する荷重として、次のように表される。

$$f_1^r = l_1 \hat{f}_1^r + l_2 \hat{f}_2^r \quad (6)$$

$$f_2^r = -l_2 \hat{f}_1^r + l_1 \hat{f}_2^r \quad (7)$$

$$f_3^r = \hat{f}_3^r \quad (8)$$

$$m_1^r = l_1 \hat{m}_1^r + l_2 \hat{m}_2^r + \alpha_3^r l_2 \hat{f}_1^r - \alpha_3^r l_1 \hat{f}_2^r \quad (9)$$

$$m_2^r = -l_2 \hat{m}_1^r + l_1 \hat{m}_2^r + \alpha_3^r l_1 \hat{f}_1^r + \alpha_3^r l_2 \hat{f}_2^r \quad (10)$$

ただし、 (l_1, l_2) は接合線の単位方向ベクトルの X_1, X_2 成分、 α_3^r は接合線の x_3 座標であり、通常は $\alpha_3^r = \pm h^r/2$ である。ただし h^r はリブの高さである。以上のように表される線分布荷重の作用する弾性板およびリブを解析することとなる。

2.1. 弾性板の曲げ変形に対する積分方程式

弾性板に作用する荷重は、既知の分布圧力や分布モーメント、そしてリブとの接合線で生じる線分布力 f_i^r ($i = 1, 2, 3$) および線分布モーメント m_i^r ($i = 1, 2$) である。弾性板の曲げ変形に対し、分布力 F および X_i 軸まわりの分布モーメント M_i ($i = 1, 2$) を受ける弾性板を考える。この弾性板中央面のたわみ W に関する支配微分方程式は次式で与えられる。

$$\nabla^4 W - F + \epsilon_{ij} M_{i,j} = 0, \quad x \in \Omega \quad (11)$$

ただし、 ∇^4 は次の微分作用素で表される。

$$\nabla^4 = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \quad (12)$$

ここで、 D_{ij} は異方性板の曲げ剛性、 W は弾性板中央面のたわみ、 F は弾性板中央面に作用する単位面積あたりの分布力、 M_i は同じく分布モーメントである。下付き添え字 $i, j = 1, 2$ は総和規約に従い、コンマの後の添え字はその座標系での微分を表す。また、 ϵ_{ij} は交代記号であり、次式で表される。

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

直接法に基づく境界要素法により平板の古典理論を解析するためには、次の正規化された積分方程式を用いることがで

きる (7)~(11).

$$\int_{\Gamma} \left[W^* V_n - \Theta_n^* M_n + M_n^* \Theta_n - V_n^* \{W - W(y)\} \right] ds + \sum_{k_c=1}^{N_c} \left[M_{nt}^* \{W - W(y)\} - W^* M_{nt} \right]_{k_c} + \int_{\Omega} W^* F d\Omega + \int_{\Omega} \epsilon_{ij} \frac{\partial W^*}{\partial x_j} M_i d\Omega = 0 \quad (14)$$

ただし, n_i は弾性板境界における外向き単位法線ベクトルの成分, k_c はかど点をカウントする自然数, $\sum []$ は, 括弧内のかど点における不連続量の全かど点数 N_c に関する総和を意味する. 直交異方性板の基本解 W^* については参考文献 (12) を参照されたい.

また, 通常の境界要素法による弾性板の解析と同様に, たわみおよびたわみ勾配に関する積分方程式を用いる. たわみ勾配に関する正則化された積分方程式は, 次式のように与えられる.

$$\int_{\Gamma} \left[\frac{\partial W^*}{\partial y_k} V_n - \frac{\partial \Theta_n^*}{\partial y_k} M_n + \frac{\partial M_n^*}{\partial y_k} \{ \Theta_n - W_{,i}(y) n_i \} - \frac{\partial V_n^*}{\partial y_k} \{ W - W(y) - r_i W_{,i}(y) \} \right] ds + \sum_{k_c=1}^{N_c} \left[\frac{\partial M_{nt}^*}{\partial y_k} \{ W - W(y) - r_i W_{,i}(y) \} - \frac{\partial W^*}{\partial y_k} M_{nt} \right]_{k_c} + \int_{\Omega} \frac{\partial W^*}{\partial y_k} F d\Omega + \int_{\Omega} \epsilon_{ij} \frac{\partial^2 W^*}{\partial y_k \partial x_j} M_i d\Omega = 0 \quad (15)$$

弾性板における積分方程式を立てる際には, 上式によって計算されるたわみ勾配 $W_{,i}(y)$ を法線方向たわみ勾配 $\Theta_n(y)$ と関連づけた境界積分方程式を用いる. 以上の積分方程式に関する詳細は文献を参照されたい (5), (7)~(11).

2.2. 弾性板の面内変形に対する積分方程式

面内変形すなわち平面応力状態における変位場において, 2つの直交する対称軸を持つ直交異方性材料の応力・ひずみ関係式は, 次式で表される.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

ここで a_{ij} は弾性係数である. 直交異方性の主軸を x , y 軸に取った場合, 式 (16) の a_{ij} は次式で表される.

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad a_{22} = \frac{1}{E_2} \\ a_{16} = 0, \quad a_{26} = 0, \quad a_{66} = \frac{1}{G_{12}} \quad (17)$$

ただし E_{ii} , ν_{ij} , G_{ij} はそれぞれ Young 率, Poisson 比, 横弾性係数である.

境界上の変位と表面力を関係づける境界積分方程式は異方性弾性体の2次元静弾性問題の基本解 (13) を用いて導出する. 次式に示す境界積分方程式により境界上の変位と表面力および線分布荷重を関係づけることができる (14).

$$c_{ij} U_i(y) + \int_{\Gamma} T_{ij}^* U_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}^* T_i d\Gamma + \int_{\Gamma} U_{ij}^* \frac{f_i^p}{h^p} d\Gamma^c, \\ i, j = 1, 2 \quad (18)$$

ただし, $U_i, T_i (i = 1, 2)$ はそれぞれ変位, 表面力である. c_{ij} はソース点 y の置かれる形状に依存する定数であり, ソース点 y が領域内部に位置するとき δ_{ij} である. 上付きアスタリスク (*) はそれらに対する基本解であることを示す. 本研究で用いた基本解は観測点とソース点の座標に関する複素変数の関数として表されるが, 特異性のオーダーは等方性板のものと同じである.

2.3. リブの引張り変形に対する積分方程式

リブに対して分布力として作用する f_1^r により, リブの引張り変形が生じる. この変形に対し, 支配微分方程式は次式で与えられる (14).

$$E^r A \frac{d^2 u_1}{dx_1^2} + f_1^r = 0, \quad x_1 \in [0, L] \quad (19)$$

ただし, E^r はリブの Young 率, A はリブの断面積, u_1 はリブの局所座標系における x_1 方向の変位, L はリブの長さである. 内点 y における x_1 方向変位 u_1 に対する積分方程式は次のように与えられる.

$$u_1(y) = [u_1^* v_1]_0^L - [v_1^* u_1]_0^L + \int_0^L u_1^* f_1^r dx, \quad y \in (0, L) \quad (20)$$

ただし, $u_1^*(x_1, y)$ は支配微分方程式 (19) の基本解, v_1 はリブ横断面に生じる引張り力, v_1^* は引張り力に関する基本解である. 上式においてソース点 y を境界へ移動することにより, 境界上の変位 u_1 とその他の諸量を関係づける積分方程式が得られる.

2.4. リブの曲げ変形に対する積分方程式

リブに作用する分布荷重 f_3^o および m_2^o により $x_1 x_3$ 平面内の曲げが, また f_2^o により $x_1 x_2$ 平面内での曲げが生じる. 一般的に, 分布力 \bar{f} および分布モーメント \bar{m} が作用するリブの曲げに関する支配微分方程式は次式で与えられる (15).

$$E^r I \frac{d^4 u}{dx_1^4} - \bar{f} - \frac{d\bar{m}}{dx_1} = 0, \quad x_1 \in [0, L] \quad (21)$$

ただし, E^r はリブの Young 率, I はリブ断面の断面二次モーメント, u はリブのたわみである. このようなりブの内部の点 y におけるたわみに関する積分方程式は次式で与えられる.

$$u(y) = [u^* v]_0^L - [\vartheta^* m]_0^L + [m^* \vartheta]_0^L - [v^* u]_0^L + \int_0^L (u^* \bar{f} - \vartheta^* \bar{m}) dx_1, \quad y \in (0, L) \quad (22)$$

ただし, ϑ はたわみ勾配, m は曲げモーメント, v はせん断力であり, u^* は式 (21) の基本解であり, ϑ^*, m^*, v^* は, 変位に関する基本解 u^* により定義される関数である. 弾性板の静的曲げにおける定式化と同様, たわみ勾配に関する積分方程式は, 式 (22) をソース点の座標 y で微分することで得られる.

$$\frac{du(y)}{dy} = \left[\frac{\partial u^*}{\partial y} v \right]_0^L - \left[\frac{\partial \vartheta^*}{\partial y} m \right]_0^L + \left[\frac{\partial m^*}{\partial y} \vartheta \right]_0^L - \left[\frac{\partial v^*}{\partial y} u \right]_0^L + \int_0^L \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \bar{f} - \frac{\partial \vartheta^*}{\partial y} \bar{m} \right) dx_1, \quad y \in (0, L) \quad (23)$$

これらの積分方程式を元に必要となる積分方程式を導出する。

2.5. リブのねじり変形に対する積分方程式

リブに対して作用する分布ねじりモーメント m_1^r により、リブのねじり変形が生じる。この変形に対し、支配微分方程式は次式で与えられる⁽¹⁴⁾。

$$G^r I_1 \frac{d^2 \varphi}{dx_1^2} + m_1^r = 0, \quad x_1 \in [0, L] \quad (24)$$

ただし、 G^r はリブの横弾性係数、 I_1 はリブの x_1 軸周りの断面二次極モーメント、 φ はリブの局所座標系における x_1 軸まわりの回転角である。

リブのねじり変形に対しては、引張り変形と同様の定式化を行うため、ここでは省略する。

2.6. 線分布荷重の取り扱い

以上に示された積分方程式には、それぞれ線分布荷重に関する積分が含まれる。弾性板の変形に対する定式化では、一般的に単位面積あたりで分布荷重を取り扱ったが、線分布荷重の場合、その線上のみでの積分として評価できる。例えば弾性板の曲げ変形において、たわみに関する積分方程式中の横荷重に関する領域積分は、次式のように評価できる。

$$\int_{\Omega} W^* F d\Omega = \int_{\Omega} W^* Q d\Omega + \sum_{i=1}^{N_L} \int_{\gamma_i} W^* f_3^p d\gamma_i \quad (25)$$

ただし、右辺第一項は外力として与えられる横荷重に関する領域積分項であり、第二項は線分布荷重に関する線積分項である。 N_L は接合線の数を表す。

2.7. 接合線における力の釣り合い式

これまでの積分方程式には、すべて線分布荷重の線積分が含まれる。接合線上のある一点を考えた場合、弾性板に作用する線分布荷重成分5つ、リブに作用する線分布荷重成分5つの計10個の未知数が余計に含まれているが、作用反作用の関係から、接合線上で独立な線分布荷重成分は5つである。

$$\hat{f}_i^p + \hat{f}_i^r = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (26)$$

$$\hat{m}_i^p + \hat{m}_i^r = 0, \quad i = 1, 2 \quad (27)$$

2.8. 接合線における変位および回転角の連続の式

接合線で独立な荷重成分を5つ考慮していることから、5つの式を準備する必要がある。本研究では接合線上での変位3成分および X_1, X_2 軸まわりの回転角を用いることにする。

弾性板において、接合線上の全体座標系での変位 \hat{U}_i ($i = 1, 2, 3$) は Kirchhoff の仮定^{(6),(16)}に基づき、次のように与えられる。

$$\hat{U}_1 = U_1 - \alpha_3^p \frac{\partial W}{\partial X_1} \quad (28)$$

$$\hat{U}_2 = U_2 - \alpha_3^p \frac{\partial W}{\partial X_2} \quad (29)$$

$$\hat{U}_3 = W \quad (30)$$

ただし、 (U_1, U_2, W) は弾性板中立面での変位成分である。これらの変位成分は式(18)および(14)により、またたわみ勾配成分は式(15)により、境界上の諸量および線分布荷重と関

係づけることができる。同様に、全体座標系での接合線上の回転角成分 $\hat{\Theta}_i$ ($i = 1, 2$) は次式で表される。

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{\partial W}{\partial X_2} \quad (31)$$

$$\hat{\Theta}_2 = -\frac{\partial W}{\partial X_1} \quad (32)$$

上式に含まれるたわみ勾配成分に対しては、式(15)を用いることができる。

一方、リブの諸量は局所座標系で表されるため、局所座標系での変位成分を全体座標系へと変換する必要がある。接合線上の全体座標系での変位成分 \hat{u}_i ($i = 1, 2, 3$) は次のように与えられる。

$$\hat{u}_1 = l_1 u_1 - \alpha_3^r l_1 \frac{du_3}{dx_1} - l_2 u_2 + \alpha_3^r l_2 \varphi \quad (33)$$

$$\hat{u}_2 = l_2 u_1 - \alpha_3^r l_2 \frac{du_3}{dx_1} + l_1 u_2 - \alpha_3^r l_1 \varphi \quad (34)$$

$$\hat{u}_3 = u_3 \quad (35)$$

ただし、 u_i ($i = 1, 2, 3$) は局所座標系でのリブ中立面の変位成分、 φ は x_1 軸周りの回転角である。これらの諸量はすべて境界積分方程式により、リブの境界量および線分布荷重と関係づけることができる。また、リブの接合線上での回転角は次のように表される。

$$\hat{\theta}_1 = l_1 \varphi + l_2 \frac{du_3}{dx_1} \quad (36)$$

$$\hat{\theta}_2 = l_2 \varphi - l_1 \frac{du_3}{dx_1} \quad (37)$$

以上の式を用いて、たわみおよびたわみ勾配の連続の式は次のように表される。

$$\hat{U}_i - \hat{u}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (38)$$

$$\hat{\Theta}_i - \hat{\theta}_i = 0, \quad i = 1, 2 \quad (39)$$

以上のように、接合線上で5つの未知数を設定し、これらを補うための5つの式を準備することができる。面内変形および面外変形に対する境界積分方程式に加え、上記のたわみおよびたわみ勾配の連続の式を連立して解くことで、対象とする補強板の解析を行うことができる。

3. 数値解析例

Fig. 2 に示すような全周単純支持され、板面に垂直に一様分布荷重 1.0 [Pa] が作用する補強板を考える。なお、弾性板は Young 率 $E_1 = 150$ [GPa]、 $E_2 = 20$ [GPa]、Poisson 比 $\nu_1 = 0.3$ 、 $\nu_2 = 0.04$ 、 $\nu_3 = 0.3$ とし、横弾性係数 $G_{12} = 15$ [GPa] とする。また、板厚は 0.01 [m] とする。弾性板の境界条件は Fig. 2 に示してあるものを用いる。Fig. 2 に示すような補強はりを考え、Young 率 $E = 17$ [GPa]、Poisson 比 $\nu = 0.3$ とする。また x_2, x_3 軸方向の寸法はそれぞれ Fig. 2 に示してあるもので、境界条件は両端とも自由端であるものとする。

弾性板の境界部分は4次境界要素を用いて一辺10要素に分割し、内部セルは2次 Lagrange 要素を用いている。各線分布荷重は一定要素により5, 10, 20要素に分割する。それぞれの結果を Condition 1 (Case 1, Case 2, Case 3) としている。

また弾性板境界を4次境界要素を用いて一辺15要素に分割し、各線分布荷重を一定要素により10要素、15要素に分割した結果をCondition 2 (Case 1, Case 2)としている。

Fig. 3, Fig. 4に補強板中心線でのたわみを示す。またFig. 5~Fig. 7に線分布荷重成分を示す。

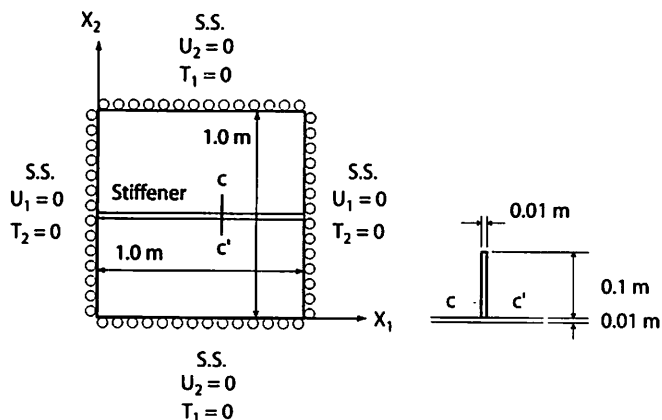


Fig. 2 A square plate with all edges simply supported and stiffened along $X_2 = 0.5$

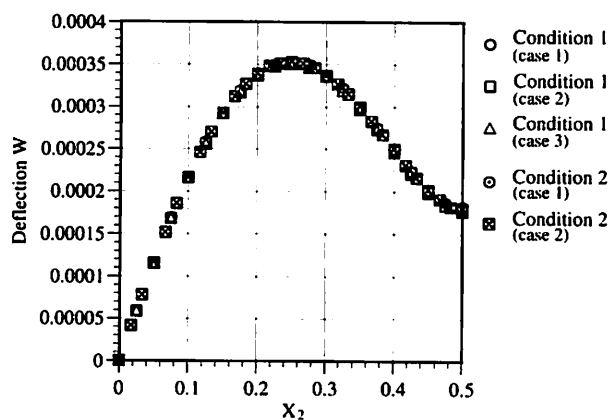


Fig. 3 Deflections along the center line $X_1 = 0.5$

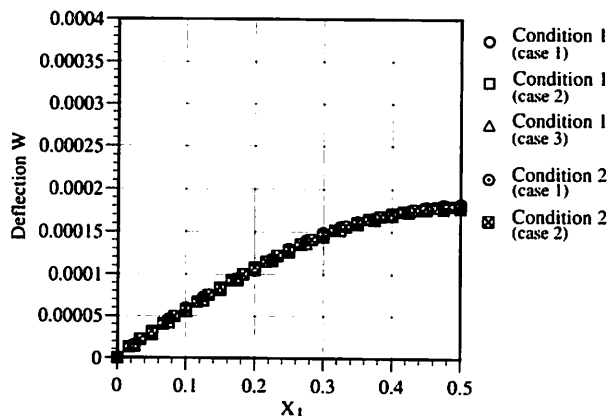


Fig. 4 Deflections along the center line $X_2 = 0.5$

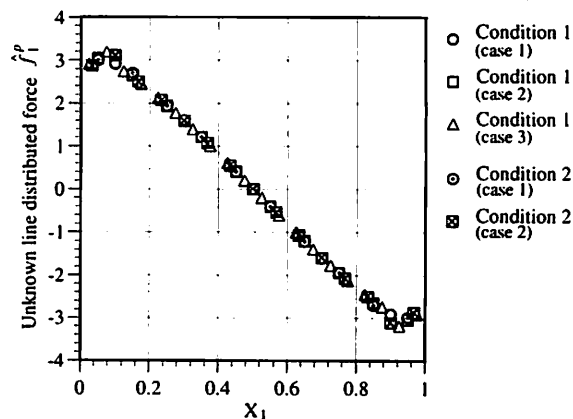


Fig. 5 Variations of \hat{f}_1^p along the contacting line

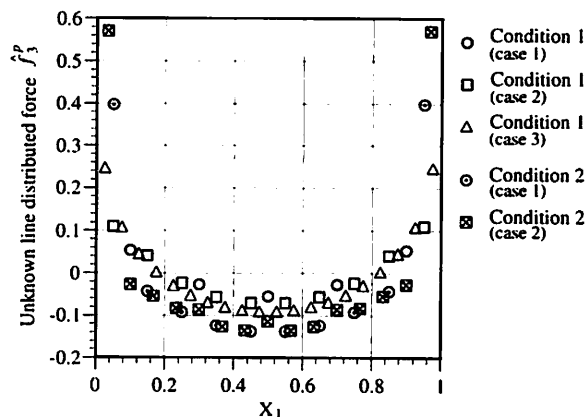


Fig. 6 Variations of \hat{f}_3^p along the contacting line

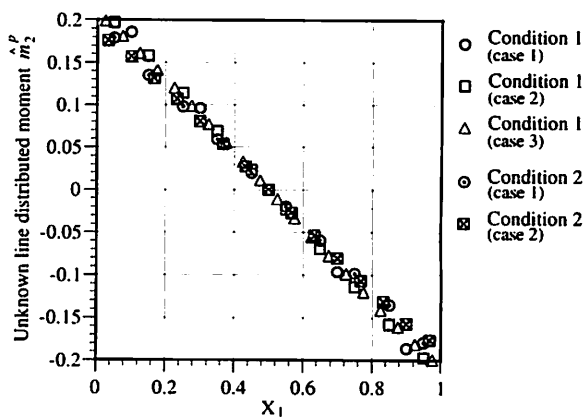


Fig. 7 Variations of \hat{m}_2^p along the contacting line

4. まとめ

本研究では、偏心補強異方性板の静的曲げ変形問題に対し、接合線上の相互モーメント荷重までを考慮した高精度モデリングを行った場合について、新しい境界要素解析法を提案した。幾つかの例題について数値計算を行ない、計算条件を変化させて得られる結果を比較することにより、提案手法の妥当性を検証した。ここでは簡単な例題を解析したに過ぎないが、より複雑な組立板構造の解析に応用可能な解析コー

ドを開発した。今後は解析コードの汎用化を進め、ユーザーフレンドリーな汎用解析システムを開発し、実用構造の解析に適用する予定である。

参考文献

- (1) Hu, C., Hartley, G. A. : Engineering Analysis with Boundary Elements, **13** (1994), pp. 229–238.
- (2) Tanaka, M., Bercin, A. N. : Boundary Elements XIX, Brebbia, C. A. and Aliabdi, M. H. (eds.), (1997), pp. 203–212, *Computational Mechanics Publications*.
- (3) Sapountzakis, E. J., Katsikadelis, J. T. : Computational Mechanics, **23** (1999), pp. 430–439.
- (4) 田中正隆, 松本敏郎, 老田昇司: 境界要素法論文集, 2000, **24**, pp. 23-28.
- (5) 田中正隆, 松本敏郎, 老田昇司: 日本機械学会論文集, **66**–649, A(2000–9), pp. 1649–1656.
- (6) Timoshenko, S. P., Woinowsky-Krieger, S. : Theory of Plates and Shells, 2nd Ed., (1959), *McGraw-Hill*.
- (7) Bézine, G., Gamby, D. : Recent Advances in Boundary Element Methods, Brebbia, C. A. (ed.), (1978), pp. 327–342, *Pentech Press*.
- (8) Stern, M. : International Journal of Solids and Structures, **15** (1979), pp. 769–782.
- (9) Hartmann, F. : Elastostatic, Progress in Boundary Element Methods, **1**, Brebbia, C. A. (ed.), (1981), pp. 84–167, *Pentech Press*.
- (10) Matsumoto, T., Tanaka, M. : Singular Integrals in Boundary Element Methods, Sladek, V. and Sladek J. (eds.), (1998), pp. 263–297, *Computational Mechanics Publications*.
- (11) 松本敏郎, 田中正隆, 岡山瞬: 機械学会論文集, **64**–628, A (1998), pp. 2906–2913.
- (12) G. M. Shi and G. Bezine : A General Boundary Integral Formulation for the Anisotropic Plate Bending Problems, *Laboratoire de Mecanique des Solides*, 1987.
- (13) 結城良治: 界面の力学, 1993, 培風館.
- (14) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行: 境界要素法, 1991, 培風館.
- (15) Stern, M. : Boundary Element Methods in Structural Analysis, Beskos, D. E. (ed.), (1989), pp. 41–64, *American Society of Civil Engineers*.
- (16) C. L. Dym, I. H. Shames (著): 砂川恵 (監訳), 材料力学と変分法, 1977, ブレイン図書.