

指数補間から導かれる任意多点差分法の

逆向き熱伝導問題への適用

APPLICATION OF AN EXPONENTIAL TYPE LATTICE FREE FINITE
DIFFERENCE METHOD TO BACKWARD HEAT CONDUCTION PROBLEMS飯島 健太郎¹⁾

Kentaro Iijima

1) 茨城大学大学院理工学研究科 (〒 310-8512 水戸市文京 2-1-1, E-mail: nd2401a@mcs.ipc.ibaraki.ac.jp)

The backward heat conduction problem is a typical example of ill-posed problems in the sense that the solution is unstable for errors in data. Our aim is to create a meshless high order finite difference method in which quadrature points do not need to have a lattice structure. In order to develop our method we show a tool using the Taylor expansion. We interpret our method from the viewpoint of the exponential interpolation. From numerical experiments we confirmed that our method is effective in order to solve two-dimensional backward heat conduction equation subject to mixed boundary conditions.

Key Words: Exponential interpolation, Meshless finite difference method, Inverse problem

1. はじめに

逆向き熱伝導問題を考える. 最終時刻 $T > 0$ に対して 2 次元熱伝導体を表す領域 $D \subset \mathbf{R}^2$ と, 時空領域 $\Omega = D \times (0, T) \subset \mathbf{R}^3$ をとる. ここでは, 領域 Ω の点を $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, t) = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ と表す. 境界 $\partial\Omega$ に含まれる二つの面 $\Gamma_B = \partial D \times [0, T]$ と $\Gamma_F = D \times \{T\}$ の和集合を $\Gamma_d = \Gamma_B \cup \Gamma_F$ と表す. さらに Γ_B を二つの面 $\Gamma_{B1} \subset \Gamma_B$ と $\Gamma_{B2} = \Gamma_B \setminus \Gamma_{B1}$ に分ける. このとき, 与えられた Dirichlet データ $\bar{u}: \Gamma_{B1} \rightarrow \mathbf{R}$, Neumann データ $\bar{q}: \Gamma_{B2} \rightarrow \mathbf{R}$ および最終データ $u_F: \Gamma_F \rightarrow \mathbf{R}$ に対して,

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = \Delta u \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_{B1}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{on } \Gamma_{B2} \quad (2)$$

$$u = u_F \quad \text{on } \Gamma_F \quad (3)$$

を満たす関数 $u(\mathbf{x})$ を求める問題を考える. ただし

Δ を Laplacian $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ とし, ベクトル $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = {}^t(n_1(\mathbf{x}), n_2(\mathbf{x}), 0)$ を境界 ∂D の点 \mathbf{x} における外向き単位法線ベクトルとする. 問題 (1)-(3) を 2 次元の混合境界値逆向き熱伝導問題とよぶ.

逆向き熱伝導問題は与えられた最終データに対して, 解が不安定となる非適切問題の典型例として知られている⁽¹⁾. 逆向き熱伝導問題がもつ解の不安定性の例を以下に示す:

領域 D を $(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ とする. また $\Gamma_{B1} = \Gamma_B$ および $\Gamma_{B2} = \emptyset$ と置く. 最終データ $u_F^{(l)}(\mathbf{x}) = e^{-2l^2 T} \sin l x_1 \sin l x_2$, $\mathbf{x} \in \Gamma_F$ と境界データ $\bar{u}^{(l)}(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \Gamma_{B1}$, $l \in \mathbf{N}$ を与える. このとき, 熱方程式 (1) の解は $u^{(l)}(\mathbf{x}) = e^{-2l^2 x_3} \sin l x_1 \sin l x_2$ である. 二つの L^2 ノルムを, 関数 $u: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ に対しては

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} := \left\{ \int_{\Omega} u(\mathbf{x})^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

関数 $v: \Gamma_F \rightarrow \mathbf{R}$ と点 $\mathbf{x}' = {}^t(x_1, x_2) \in D$ に対しては

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_F)} := \left\{ \int_D v(\mathbf{x}', T)^2 d\mathbf{x}' \right\}^{\frac{1}{2}}$$

と置くと、解は

$$\begin{aligned} & \|u^{(l)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \int_{\Omega} \left(e^{-2l^2 x_3} \sin lx_1 \sin lx_2 \right)^2 dx \\ &= \int_0^T e^{4l^2(T-x_3)} dx_3 \int_D \left(e^{-2l^2 T} \sin lx_1 \sin lx_2 \right)^2 d\mathbf{x}' \\ &= \frac{1}{4l^2} \left(e^{4l^2 T} - 1 \right) \|u_F^{(l)}\|_{L^2(\Gamma_F)}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

と評価される。任意の $C > 0$ に対して $l \in \mathbf{N}$ が存在して $\frac{1}{2l} \sqrt{e^{4l^2 T} - 1} > C$ となる。したがって、すべての $C > 0$ に対して $l \in \mathbf{N}$ が存在して、不等式 $\|u^{(l)}\|_{L^2(\Omega)} > C \|u_F^{(l)}\|_{L^2(\Gamma_F)}$ が成り立つ。これは解が最終データに連続的に依存しないことを示している。ゆえに、逆向き熱伝導問題の解は L^2 ノルムに関して不安定である。

本研究の目的は、逆向き熱伝導問題の数値解法を得ることである。近年、解が不安定となる非適切問題に対して、高精度の数値計算手法が有効であるという研究が報告されている (2), (3)。この研究は、観測データに誤差が含まれない場合、問題の離散化誤差と計算機内で生じる丸め誤差を小さくすることによって、非適切問題であっても数値解が再構成できるという考えに基づく。具体的には、離散化誤差に対してスペクトル選点法を用い、丸め誤差に対しては任意多倍長計算を用いている。しかしスペクトル選点法では、特殊な選点である Chebyshev-Gauss-Lobatto 選点 (4) が用いられており、複雑な領域形状をもつ問題に対して、スペクトル選点法を用いるのは困難である。

本研究では、複雑な領域形状をもつ逆向き熱伝導問題に対する数値解法を開発する。そのために必要な高精度離散化手法としては、任意多点差分法を導入する。さらに、指数補間を用いることにより、任意多点差分近似の意味を明らかにする。また、多倍長計算を用いない数値実験により、任意多点差分法の効果を確認する。

2. 差分近似

表記を簡略化するために多重指数を用いる。非負整数全体 $\mathbf{Z}_+ := \{z \in \mathbf{Z} : z \geq 0\}$ の直積集合を $\mathbf{Z}_+^m = \overbrace{\mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z}_+ \times \cdots \times \mathbf{Z}_+}^m$ と表す。このとき $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbf{Z}_+^m$ を多重指数という。記号 $\mathbf{0}$ は $(0, 0, \dots, 0)$ を表す。

多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbf{Z}_+^m$ に対していくつかの演算を定義する。長さを $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$ によって定める。ただし、ベクトル $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m$ の長さは $|\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2}$ であり、多重指数の長さ $|\cdot|$ とは区別する。ベクトル \mathbf{x} のべき乗を $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m}$ によって定義する。階乗 α を $\alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_m!$ と定める。微分作用素 $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha}$ は $\frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_m}}{\partial x_m^{\alpha_m}}$ を表す。形式的に $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\boldsymbol{\theta} = (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_m)$

と置くことで、 $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha} = \boldsymbol{\theta}^\alpha$ と書くことにする。

この節では差分近似を導出する。関数 u を有界領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ 上の解析関数とする。このとき、関数 u の Taylor 展開

$$u(\mathbf{y}) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_+^m} \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x})^\alpha}{\alpha!} \boldsymbol{\theta}^\alpha u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \quad (5)$$

は一様絶対収束する。領域 Ω 内に $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_m)$ と、 N 個の求積点 $\mathbf{x}^{(j)} = {}^t(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_m^{(j)})$, $j = 1, 2, \dots, N$ をランダムに配置する。実定数 a_α , $\alpha \in \mathbf{Z}_+^m$ を、ある $\mu_0 \in \mathbf{N}$ に対して $a_\alpha = 0$, $|\alpha| > \mu_0$ となるようにとり、微分作用素 $P(\boldsymbol{\theta})$ を

$$P(\boldsymbol{\theta}) := \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_+^m} a_\alpha \boldsymbol{\theta}^\alpha \quad (6)$$

と置く。このとき、導関数の値 $P(\boldsymbol{\theta})u(\mathbf{x})$ を関数値 $u(\mathbf{x}^{(j)})$, $j = 1, 2, \dots, N$ の一次結合で表すことを考える。すなわち、重み $w_j(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \dots, N$ を適切に選ぶことによって、 $P(\boldsymbol{\theta})u(\mathbf{x})$ を

$$P(\boldsymbol{\theta})u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N w_j(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}^{(j)}) + \varepsilon(\mathbf{x}; P(\boldsymbol{\theta})u) \quad (7)$$

によって表す。ここで、 $\varepsilon(\mathbf{x}; P(\boldsymbol{\theta})u)$ は離散化誤差を表す。近似 (7) を $P(\boldsymbol{\theta})$ の $\mathbf{x}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, N$ に関する任意多点差分近似とよぶ。

実際に重み $w_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2, \dots, N$ を以下のように決定する。微分作用素 (6) を式 (7) へ代入すると、式 (7) の左辺は

$$P(\boldsymbol{\theta})u(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_+^m} a_\alpha \boldsymbol{\theta}^\alpha u(\mathbf{x}), \quad \alpha \in \mathbf{Z}_+^m \quad (8)$$

となる。Taylor 展開 (5) を用いると式 (7) の右辺第 1

項は

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N w_j(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}^{(j)}) \\ &= \sum_{j=1}^N w_j(\mathbf{x}) \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} \frac{1}{\alpha!} (\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x})^\alpha \partial^\alpha u(\mathbf{x}) \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

となる。近似式 (7) から

$$\begin{aligned} & \varepsilon(\mathbf{x}; P(\partial)u) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} \left\{ a_\alpha - \sum_{j=1}^N w_j(\mathbf{x}) \frac{1}{\alpha!} (\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x})^\alpha \right\} \partial^\alpha u(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

を得る。従来の差分法では、できるだけ大きな自然数 μ に対して連立一次方程式

$$a_\alpha = \sum_{j=1}^N w_j(\mathbf{x}) \frac{1}{\alpha!} (\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x})^\alpha, \quad |\alpha| \leq \mu \quad (10)$$

満たす $w_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2, \dots, N$ を重みとして選ぶ。

本手法では重みの決定法を次のように修正する。相異なるベクトル $\xi^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, N$ を \mathbf{R}^m から選ぶ。等式 (10) の両辺に $(\xi^{(i)})^\alpha$ をかけ、すべての $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ について和をとると、等式は

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} a_\alpha (\xi^{(i)})^\alpha \\ &= \sum_{j=1}^N w_j(\mathbf{x}) \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} \frac{1}{\alpha!} (\xi^{(i)})^\alpha (\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x})^\alpha \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

となる。一般に、等式

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} \frac{1}{\alpha!} \xi^\alpha x^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{k=1}^m \frac{1}{\alpha_k!} \xi_k^{\alpha_k} x_k^{\alpha_k} \\ &= \prod_{k=1}^m \sum_{\alpha_k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k!} \xi_k^{\alpha_k} x_k^{\alpha_k} = \prod_{k=1}^m e^{\xi_k x_k} \\ &= e^{\xi \cdot \mathbf{x}}, \quad \mathbf{x}, \xi \in \mathbf{R}^m \quad (12) \end{aligned}$$

が成り立つ。等式 (12) と多項式 $P(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} a_\alpha \xi^\alpha$, $\xi \in \mathbf{R}^m$ から、等式 (11) は

$$P(\xi^{(i)}) e^{\xi^{(i)} \cdot \mathbf{x}} = \sum_{j=1}^N w_j(\mathbf{x}) e^{\xi^{(i)} \cdot \mathbf{x}^{(j)}}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (13)$$

と変形される。行列 $L = (l_1, l_2, \dots, l_N) := (e^{\xi^{(i)} \cdot \mathbf{x}^{(j)}})_{i,j=1}^N$, $Q := (P(\xi^{(i)}) \delta_{ij})_{i,j=1}^N$ と列ベクトル $\mathbf{l}(\mathbf{x}) := (e^{\xi^{(i)} \cdot \mathbf{x}})_{i=1}^N$, $\mathbf{w}(\mathbf{x}) := (w_j(\mathbf{x}))_{j=1}^N$ を用いることで、連立一次方程式 (13) は

$$Q\mathbf{l}(\mathbf{x}) = L\mathbf{w}(\mathbf{x}), \quad (14)$$

と表される。ただし δ_{ij} は Kronecker のデルタである。ゆえに、もし L が正則ならば、重み $w_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2, \dots, N$ は

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = L^{-1}Q\mathbf{l}(\mathbf{x}) \quad (15)$$

によって与えられる。列ベクトル $\mathbf{u} := (u(\mathbf{x}^{(j)}))_{j=1}^N$ を用いると、本手法における差分近似は

$$\begin{aligned} P(\partial)u(\mathbf{x}) &= {}^t\mathbf{w}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \varepsilon(\mathbf{x}; P(\partial)u) \\ &= {}^t(L^{-1}Q\mathbf{l}(\mathbf{x}))\mathbf{u} + \varepsilon(\mathbf{x}; P(\partial)u). \quad (16) \end{aligned}$$

によって表現される。

本手法で用いたベクトル $\xi^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, N$ の選び方によっては、行列 L が正則にならないことがある。例として、 $N = 2$ において $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ を $(\xi^{(1)} - \xi^{(2)}) \cdot (\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}) = 0$ となるように選ぶと、行列 L は正則にならない。本研究では、行列 L が正則になるための十分条件をまだ得ていない。また、パラメータ $\rho > 0$ を用いて $\xi^{(i)} = \rho \mathbf{x}^{(i)}$ と置く例では、行列 L が対称となり、(15) 式の計算において行列の対称性を考慮した技法を使用できる。

3. 指数補間

本差分近似の性格を明らかにするために、指数補間との間の関係を示す。指数関数の一次結合からなる関数 \tilde{u} を各求積点 $\mathbf{x}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, N$ において関数 u と値が一致するようにとる。すなわち、ある定係数 $b_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \dots, N$ が存在し、 $\mathbf{b} := (b_i)_{i=1}^N$ に対して

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^N b_i e^{\xi^{(i)} \cdot \mathbf{x}} = {}^t\mathbf{l}(\mathbf{x})\mathbf{b}, \\ \tilde{u}(\mathbf{x}^{(j)}) &= u(\mathbf{x}^{(j)}), \quad j = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

が成り立っているとす。このとき、関数 \tilde{u} を \mathbf{u} の指数補間公式とよぶ。等式 $\mathbf{u} = (\tilde{u}(\mathbf{x}^{(j)}))_{j=1}^N = ({}^t\mathbf{l}_j \mathbf{b})_{j=1}^N = {}^tL\mathbf{b}$, が成り立つことから、一次結合の係数は $\mathbf{b} = {}^tL^{-1}\mathbf{u}$ を満たす。ゆえに、指数補間公式は

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = {}^t(L^{-1}\mathbf{l}(\mathbf{x}))\mathbf{u} \quad (17)$$

と書くことができる。

ここで微分作用素 $P(\partial)$ を公式 (17) の両辺に作用させる。等式 $P(\partial)\mathbf{l}(\mathbf{x}) = (P(\partial)e^{\xi^{(i)} \cdot \mathbf{x}})_{i=1}^N = (P(\xi^{(i)})e^{\xi^{(i)} \cdot \mathbf{x}})_{i=1}^N = Q\mathbf{l}(\mathbf{x})$ が成り立つことから、等式

$$P(\partial)\tilde{u}(\mathbf{x}) = {}^t(L^{-1}Q\mathbf{l}(\mathbf{x}))\mathbf{u} \quad (18)$$

を得る。さらに関係

$${}^t(L^{-1}QL(\mathbf{x}))\mathbf{u} = {}^t(L^{-1}\mathbf{l}(\mathbf{x})){}^t(L^{-1}QL)\mathbf{u}$$

を用いると、等式 (18) は

$$P(\boldsymbol{\theta})\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = {}^t(L^{-1}\mathbf{l}(\mathbf{x})){}^t(L^{-1}QL)\mathbf{u}$$

となる。線形空間 $\Lambda_N := \text{span}\{e^{\boldsymbol{\xi}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}} : i = 1, 2, \dots, N\}$ においては、指数補間を経由することで、行列 $\hat{P} := {}^t(L^{-1}QL)$ と微分作用素 $P(\boldsymbol{\theta})$ は同値であることが Fig. 1 から分かる。

等式 (18) から差分近似 (16) は

$$P(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}(\mathbf{x}) = P(\boldsymbol{\theta})\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x}; P(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}) \quad (19)$$

によって表される。

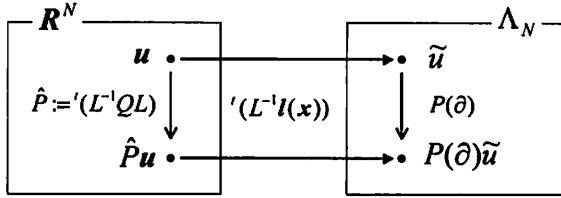


Fig. 1 Equivalence of \hat{P} and $P(\boldsymbol{\theta})$

次元 m や求積点数 N が大きくなると、従来の (10) 式を用いた重みの決定には、煩雑な多重指数の演算を多用しなければならない。一方 (15) 式は指数関数とベクトルの内積を用いて表現されており、数値的に扱いやすい。

4. 差分法

逆向き熱伝導問題を数値的に解くために任意多点差分近似 (7) を用いる。求積点 $\mathbf{x}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, N$ を領域 Ω の閉包 $\bar{\Omega}$ 内にとる。求積点 $\mathbf{x}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, N$ に対して微分作用素 $P_k(\boldsymbol{\theta})$

$$:= \begin{cases} \boldsymbol{\theta}^{(0,0,1)} - (\boldsymbol{\theta}^{(2,0,0)} + \boldsymbol{\theta}^{(0,2,0)}), & \mathbf{x}^{(k)} \in \Omega, \\ n_1(\mathbf{x}^{(k)})\boldsymbol{\theta}^{(1,0,0)} + n_2(\mathbf{x}^{(k)})\boldsymbol{\theta}^{(0,1,0)}, & \mathbf{x}^{(k)} \in \Gamma_{B2}, \\ I, & \mathbf{x}^{(k)} \in \Gamma_{B1} \cup \Gamma_F \end{cases}$$

とデータ

$$f_k := \begin{cases} 0, & \mathbf{x}^{(k)} \in \Omega, \\ \bar{u}(\mathbf{x}^{(k)}), & \mathbf{x}^{(k)} \in \Gamma_{B1}, \\ \bar{q}(\mathbf{x}^{(k)}), & \mathbf{x}^{(k)} \in \Gamma_{B2}, \\ u_F(\mathbf{x}^{(k)}), & \mathbf{x}^{(k)} \in \Gamma_F \end{cases}$$

をとる。ただし I は恒等作用素である。問題 (1)–(3) を

$$P_k(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}(\mathbf{x}^{(k)}) = f_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

と書き直して、各求積点 $\mathbf{x}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, N$ 上へ制限する。関数値 $u(\mathbf{x}^{(j)})$, $j = 1, 2, \dots, N$ の近似値を u_j と置く。パラメータ $\rho > 0$ に対して列ベクトル $\boldsymbol{\xi}^{(i)} = \rho\mathbf{x}^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, N$ と置く。このとき、与えられたデータ f_k , $k = 1, 2, \dots, N$ から近似解 u_j , $j = 1, 2, \dots, N$ を以下のようにして求める。

各求積点 $\mathbf{x}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, N$ における近傍 $S_k \subset \mathbf{R}^m$ を、その和集合 $\bigcup_{k=1}^N S_k$ が閉領域 $\bar{\Omega}$ を覆うようにとる。近傍 S_k に属する求積点のインデックスの集合を $N(S_k) := \{j \in \{1, 2, \dots, N\} : \mathbf{x}^{(j)} \in S_k\}$, $k = 1, 2, \dots, N$ と置く。ただし M_k は $N(S_k)$ の要素数である。表 $\{m_{kj}\}$ を $m_{kj} \in N(S_k)$, $j = 1, 2, \dots, M_k$, $k = 1, 2, \dots, N$ となるように作る。任意に $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ をとり固定する。近似式

$$P_k(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}(\mathbf{x}^{(k)}) \approx \sum_{j \in N(S_k)} w_{kj}u(\mathbf{x}^{(j)}) \quad (21)$$

から、重み w_{kj} , $j \in \{m_{k1}, m_{k2}, \dots, m_{kM_k}\} = N(S_k)$ を以下のように決定する。

近似式 (7) における重みが方程式 (13) によって与えられることから、重み w_{kj} , $j \in N(S_k)$ を連立一次方程式

$$P_k(\rho\mathbf{x}^{(i)})e^{\rho\boldsymbol{\omega}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(k)}} = \sum_{j \in N(S_k)} w_{kj}e^{\rho\boldsymbol{\omega}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(j)}}, \quad i \in N(S_k) \quad (22)$$

の解、および $w_{kj} = 0$, $j \notin N(S_k)$ から定める。方程式 (20) と近似式 (21) から、連立一次方程式

$$\sum_{j=1}^N w_{kj}u_j = f_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (23)$$

の解を近似解 u_j , $j = 1, 2, \dots, N$ として求める。行列 $W := (w_{kj})_{k,j=1}^N$ と列ベクトル $\hat{\mathbf{u}} := (u_j)_{j=1}^N$, $\mathbf{f} := (f_k)_{k=1}^N$ を用いることで連立一次方程式 (23) は $W\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f}$ と表現される。ゆえに、近似値 u_j , $j = 1, 2, \dots, N$ は

$$\hat{\mathbf{u}} = W^{-1}\mathbf{f} \quad (24)$$

となる。以上の方法を任意多点差分法とよぶ。

5. 数値例

任意多点差分法を逆向き熱伝導問題 (1)–(3) へ適用する。この節では各近傍 S_k がすべての求積点を含むように選ばれる例のみを示す。ゆえに、各近傍に対す

るインデックスの集合を $N(S_k) = \{1, 2, \dots, N\}$ ととる. 今後の課題として, 一般の近傍系を用いた数値実験を行う.

また, パラメータ ρ の選定基準が得られていないため, 数値実験を繰り返すことで, 数値解の誤差が小さくなるように ρ を選んだ.

例 1

領域を $D = (-0.5, 0.5) \times (-0.5, 0.5)$ とし, 最終時刻を $T = 1$ とする. 境界データは平面 $\Gamma_{B1} = \{^t(x_1, x_2, x_3) \in \partial\Omega : x_1 = -0.5, 0.5\}$ および $\Gamma_{B2} = \{^t(x_1, x_2, x_3) \in \partial\Omega : x_2 = -0.5, 0.5\}$ 上で与えられる. パラメータ $l \in \mathbb{N}$ に対して, 関数

$$u^{(l)}(\mathbf{x}) = e^{-2l^2 x_3} \sin l x_1 \sin l x_2$$

は熱方程式 (1) を満たす. 境界データと最終データを, それぞれ $\bar{u}^{(l)}(\mathbf{x}) = u^{(l)}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma_{B1}, \bar{q}^{(l)}(\mathbf{x}) = \frac{\partial u^{(l)}}{\partial n(\mathbf{x})}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma_{B2}$, および $u_F^{(l)}(\mathbf{x}) = u^{(l)}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma_F$ と与える. 求積点数が $N = 500$ としたときの, 問題 (1)-(3) の数値解を求める. 求積点配置は Fig. 2 のとおりである. Fig. 3 にパラメータ $l = 1, \rho = 4$, および時刻 $x_3 = 0$ における数値解と真の解の等高線図を示す. 得られた数値解は, 非適切問題の数値解としては安定である. Fig. 4 にパラメータ $l = 2, \rho = 4$, および時刻 $x_3 = 0$ における数値解と真の解の等高線図を示す. 数値解の精度は $l = 1$ の場合に比べて悪くなった.

実際, パラメータが $l = 1, 2, 3$ のとき, 数値解の絶対誤差 $\text{err} := \max_{j=1,2,\dots,N} |u_j - u(\mathbf{x}^{(j)})|$ はそれぞれ $1.6 \times 10^{-4}, 2.4 \times 10^{-2}$, および 8.2 である. パラメータ l が増加するに従って誤差が急激に増加することが分かる. 評価式 (4) から, 最終データ $u_F^{(l)}$ に対する解 $u^{(l)}$ の L^2 ノルムの比率は $C_l = \frac{1}{2l} \sqrt{e^{4l^2 T} - 1} = O\left(\frac{e^{2l^2}}{l}\right)$ であることが分かる. パラメータ $l = 2, 3$ に対する比率は $C_2 \approx 700$ および $C_3 \approx 10^7$ である. パラメータ $l = 3$ における数値解の精度が悪い原因として, 丸め誤差が急激に拡大したことが予想される.

例 2

領域を $D = \{^t(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 0.5^2\} \cup (0, 1) \times (-0.25, 0.25)$ とし, 最終時刻を $T = 1$ とする. 境界データは曲面 $\Gamma_{B2} = \{^t(x_1, x_2, x_3) \in \partial\Omega : x_1^2 + x_2^2 = 0.5^2\}$ および $\Gamma_{B1} = \Gamma_B \setminus \Gamma_{B2}$ で与えられる. 境界 Γ_{B2} の外向き単位法線ベクトル $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ は $^t(2x_1, 2x_2, 0)$ で

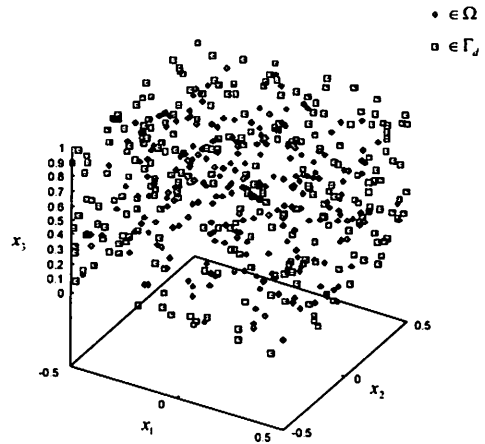


Fig. 2 Quadrature points

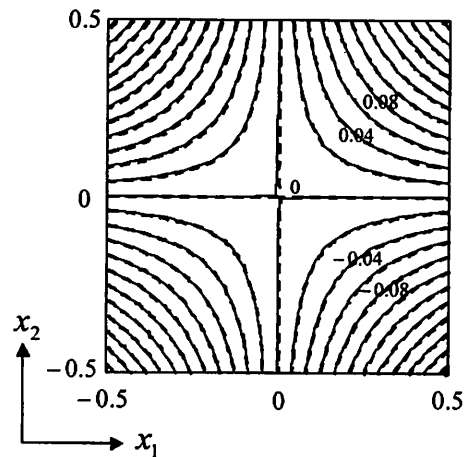


Fig. 3 Numerical(—) and exact(- - -) solutions ($l = 1, x_3 = 0$)

表される. パラメータ $\mathbf{y} = ^t(y_1, y_2, y_3) \notin \Omega$ に対して, \mathbf{x} の関数

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi(x_3 - y_3)} \text{Exp} \left[-\frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}{4(x_3 - y_3)} \right]$$

は熱方程式 (1) を満たす. パラメータが $\mathbf{y} = ^t(0, 0, -0.3)$ のとき境界データと最終データをそれぞれ $\bar{u}(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{x} \in \Gamma_{B1}, \bar{q}(\mathbf{x}) = \frac{\partial G}{\partial n(\mathbf{x})}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{x} \in \Gamma_{B2}$, および $u_F(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{x} \in \Gamma_F$ によって与える. 任意多点差分法におけるパラメータが $N = 500, \rho = 3$ のとき, 問題 (1)-(3) の数値解を求める. Fig. 5 に時刻 $x_3 = 0.5$ の数値解と真の解の等高線図を示し, Fig. 6 に時刻 $x_3 = 0$ の数値解と真の解の等高線図を示す. 数値解の誤差は $\text{err} = 4.9 \times 10^{-3}$ であった.

逆向き熱伝導問題は解が不安定であるが, 数値解に

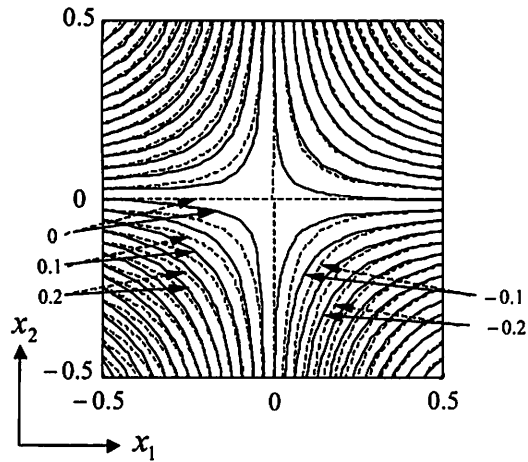


Fig. 4 Numerical(—) and exact(- - -) solutions ($l = 2, x_3 = 0$)

は数値的な不安定現象は見られない。数値解から真の解のおおよその形状を推定できる。また、円と長方形を組み合わせた簡単な形状ではあるが、長方形以外の領域に本手法が適用可能であることを示すことができた。このことから、より複雑な形状の領域に対し、本手法の応用が期待できる。

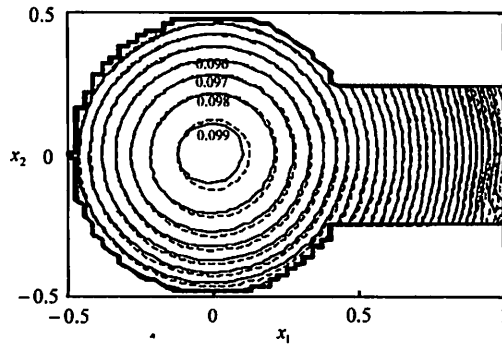


Fig. 5 Numerical(—) and exact(- - -) solution ($x_3 = 0.5$)

6. まとめ

本研究では、任意多点差分法を用いた逆向き熱伝導問題の数値解法について考察した。任意多点差分近似法は、各求積点における関数値の一次結合によって導関数の値を近似する方法である。一次結合の重みはTaylor展開を用いて定められる。

本手法は、求積点を任意の位置に配置できるため、領域の形状に依存せずに適用可能である。各求積点における導関数の値を近似するとき、求積点の格子構

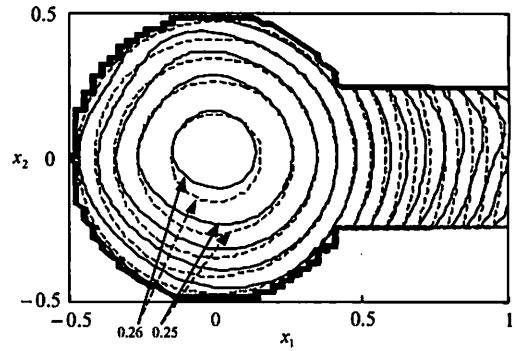


Fig. 6 Numerical(—) and exact(- - -) solution ($x_3 = 0$)

造や隣接情報を必要としないことから、本手法はメッシュフリーの特性をもつ。また、本手法によって得られる近似導関数が、与えられた求積点に関する指数補間公式の導関数と一致することを示した。

混合境界条件が与えられた2次元逆向き熱伝導問題を時空領域における3次元問題として捉え、本手法を適用した。数値例において、非適切問題の数値解が、数値的安定に得られた。最終データに対する解の拡大率が大きい場合は、数値解が丸め誤差の影響を大きく受けると考えられる。

多倍長計算との併用を今後の課題とする。

参考文献

- (1) R. Kress, *Linear Integral Equations*, Second Edition, Applied Mathematical Sciences, Vol.82, Springer-Verlag, New York (1989).
- (2) H. Imai, T. Takeuchi, and M. Kushida, On numerical simulation of partial differential equations in infinite precision, *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, Gakkōtoshō, Tokyo, Vol. 9, No. 2, pp. 1007-1016 (1999).
- (3) H. Fujiwara and Y. Iso, Numerical challenge to ill-posed problems by fast multiple-precision system, *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, Vol. 50, pp. 419-424 (2001).
- (4) C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag (1988).