

2次元BEMにおける境界点近傍のソース点に対する 境界積分の変数変換による評価法

A TRANSFORMATION METHOD FOR EVALUATION OF NEARLY SINGULAR INTEGRALS IN 2-D BEM

松本 敏郎¹⁾, 田中 正隆²⁾

Toshiro MATSUMOTO and Masataka TANAKA

1) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: toshiro@gipwc.shinshu-u.ac.jp)

2) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)

In this paper, a novel transformation based on \sinh function is proposed to use for evaluations of nearly singular integrals which arise in BEM analyses when the source point is very near the boundary element under integration. This transformation is shown to improve the shape of the curve of the integrand to a more tractable one and very accurate integration results are obtained by using only the standard Gauss-Legendre quadrature formula. The effectiveness of the proposed transformation for nearly singular kernels in various orders are demonstrated through some numerical test examples.

Key Words: Boundary Element Method, Weakly Singular Integral, Numerical Integration, Gaussian Quadrature Formula

1. はじめに

境界要素法では、領域内部の関数を計算するためには、Greenの公式やSomiglianaの公式などの積分公式を用いる。これらは基本解とその導関数を被積分関数に含んでいるので、内点(ソース点)が境界に近い時には、その付近で急激に変化し(近特異性^{(1),(2)}), 数値積分で高精度に評価するためには工夫を要する。また、薄い部分を有する固体の解析においてもソース点と要素の距離が要素寸法よりはるかに小さくなる場合があり⁽³⁾, 細長い介在物や穴をパイプ要素でモデリングした場合にも同様の問題が生じる。これに対して、これまで以下のような方法が提案されている^{(1),(4)-(6)}。

- (1) ソース点近くの要素をサブ要素に分割する方法
- (2) Stokesの定理を用いて、ソース点近くの要素に関する積分を周回積分に変換して近特異性を除去する方法
- (3) ソース近くの要素に対するソース点の鏡像点に適用した積分公式を重ね合わせて、近特異性をキャンセルする方法
- (4) 変数変換により近特異性を緩和する方法

このうち、(4)の方法は、変数変換の部分を追加するだけでよいため簡便であり、自動積分法にも応用されている。

本論文では特にパイプ要素への応用を目的として、2次元問題の境界積分において近特異性を有する被積分関数を、通

常のGauss-Legendreの数値積分公式を用いてより高精度に数値積分するための変数変換を示す。この変数変換を用いれば、 $1/r$ の近特異性を完全に消去することが可能となる。直線要素と曲線要素に対して数値計算例を示し、本変換法の有効性を示す。

2. 変数変換による近特異性の緩和

Fig. 1に示すようにある直線境界上の要素を考え、この要素上にない別の点を z とする。このとき、点 z からこの要素に下ろした垂線の足を \bar{z} 、垂線の長さを d 、要素上の別の点を \bar{x} 、要素の端点を \bar{x}_L 、点 \bar{z} と \bar{x}_L の間の距離を L とする。いま、2点 z と \bar{x} 間の距離 r に関する次の積分を考える。

$$I = \int_0^L \frac{1}{r} dR = \int_0^L \frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}} dR \quad (1)$$

ただし、 R は要素上に取った座標軸であり、

$$R = |\bar{x} - z| \quad (2)$$

である。

いま、Hayamiの方法⁽¹⁾に倣い次の変数変換を考える。

$$R = d \sinh(s) \quad (3)$$

逆変換は、次のようになる。

$$s = \sinh^{-1} \left(\frac{R}{d} \right) = \ln(R + \sqrt{R^2 + d^2}) - \ln d \quad (4)$$

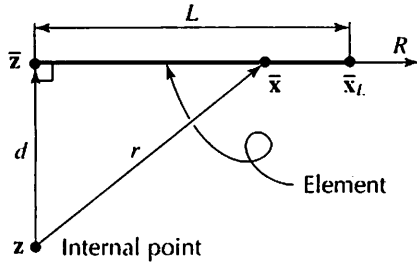


Fig. 1 A point near a straight boundary element.

このとき、式(1)の積分は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\sinh^{-1}(\frac{L}{d})} \frac{d \cosh(s)}{\sqrt{d^2 \sinh^2(s) + d^2}} ds \\
 &= \int_0^{\sinh^{-1}(\frac{L}{d})} \frac{\cosh(s)}{\sqrt{\sinh^2(s) + 1}} ds \\
 &= \sinh^{-1} \left(\frac{L}{d} \right) \quad (5)
 \end{aligned}$$

すなわち、この変数変換を用いれば被積分関数が $1/r$ だけの時は数値積分は不要となる。境界要素法で評価が必要となる境界積分は、2次元問題で直線要素の場合一般に以下の2式の形をしている。

$$I_i^a = \int_0^L \frac{\phi^i(\xi)}{r^\alpha} dR \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6)$$

$$I_i^b = \int_0^L \ln \left(\frac{1}{r} \right) \phi^i(\xi) dR \quad (i = 1, 2, 3) \quad (7)$$

ただし、 α は自然数、 ξ は要素の無次元座標、 $\phi(\xi)$ 、($i = 1, 2, 3$) は内挿関数である。2次要素の場合は、 $\phi(\xi)$ は次の3つである。

$$\left. \begin{aligned}
 \phi^1(\xi) &= \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \\
 \phi^2(\xi) &= (1 - \xi)(1 + \xi) \\
 \phi^3(\xi) &= \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)
 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで、直線要素の場合は

$$\xi = 2 \left(\frac{R}{L} \right) - 1 \quad (9)$$

である。

いま、 $\alpha = 1$ 、 $L = 1$ 、 $d = 1/100$ の時、3つの積分 I_i^a 、($i = 1, 2, 3$)の被積分関数のグラフを示すと、Fig. 2~Fig. 4のように、いずれも積分範囲のごく限られた部分で急激に変化する関数となっていることが分かる。

一方、3種類の内挿関数に対する積分(6)に式(3)の変数変換を施した関数を s に対してプロットすると、Fig. 5~Fig. 7のようになだらかな関数となり、Gaussの数値積分公式で数値積分しても精度良い評価ができそうである。

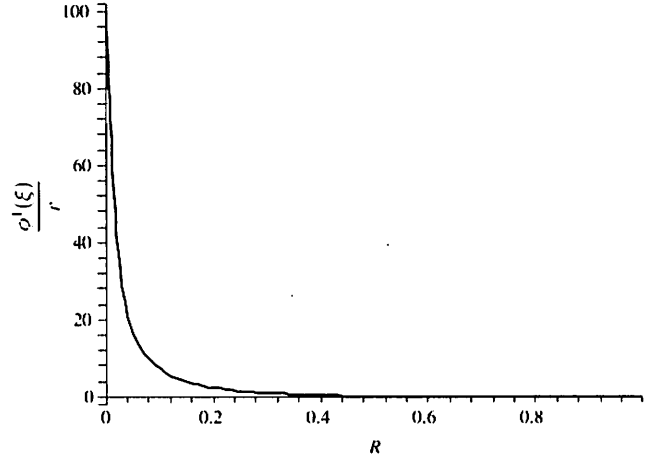


Fig. 2 Curve of ϕ^1/r for $L = 1$ and $d = 1/100$.

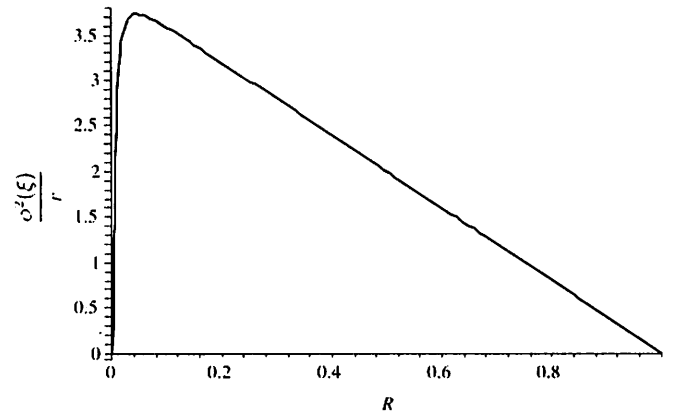


Fig. 3 Curve of ϕ^2/r for $L = 1$ and $d = 1/100$.

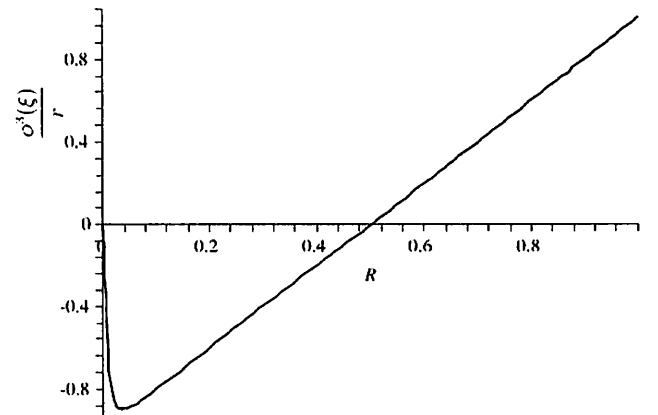


Fig. 4 Curve of ϕ^3/r for $L = 1$ and $d = 1/100$.

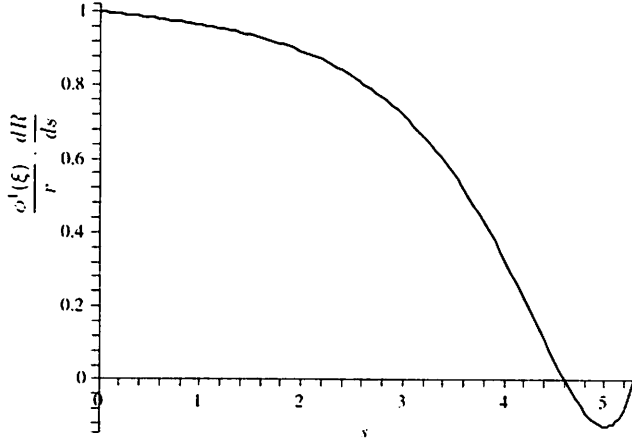


Fig. 5 Curve of $\frac{\phi^1}{r} \frac{dR}{ds}$ for $L = 1$ and $d = 1/100$.

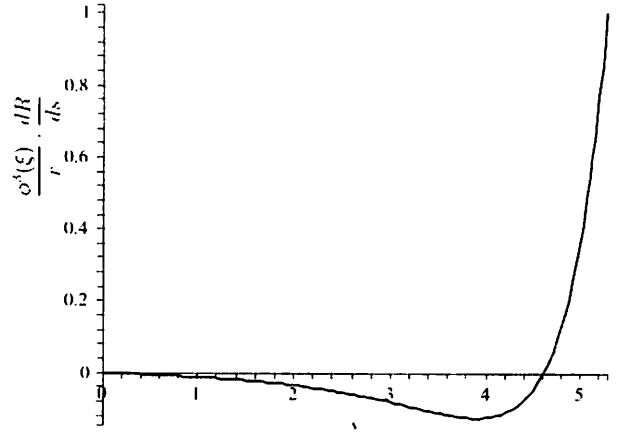


Fig. 7 Curve of $\frac{\phi^3}{r} \frac{dR}{ds}$ for $L = 1$ and $d = 1/100$.

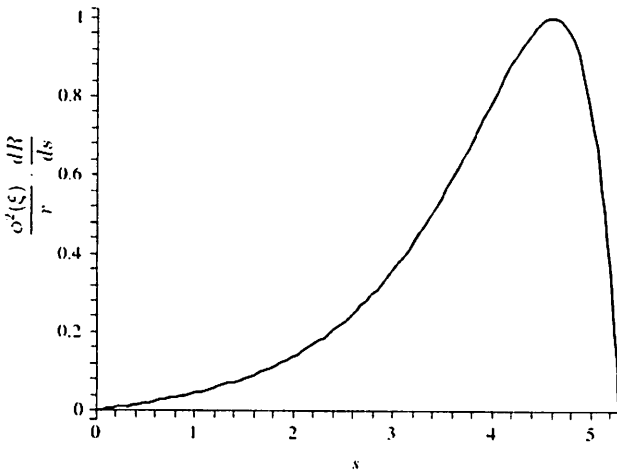


Fig. 6 Curve of $\frac{\phi^2}{r} \frac{dR}{ds}$ for $L = 1$ and $d = 1/100$.

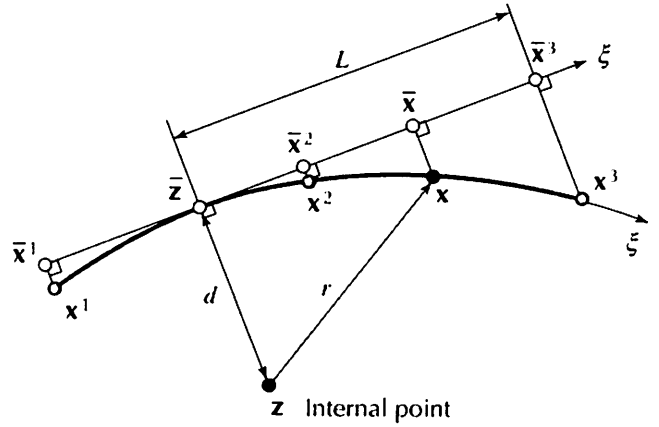


Fig. 8 An internal collocation point in the vicinity of a curved element.

次に、一般の曲線要素の場合の変数変換について考える。
Fig. 3に示すように曲線要素のごく近くのソース点 z を考える。
形状関数は2次以上のものが考えられるが、ここでは2
次要素で説明する。

2次要素の3節点をそれぞれ x^1, x^2, x^3 とし、点 z から
最短距離にある要素内の点を \bar{z} とし、 \bar{z} を通る要素の接線へ
の3節点および要素内の任意の1点 x の射影をそれぞれ $\bar{x}^1,$
 $\bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}$ とする。

このとき、評価すべき積分は以下の2式のように書くこと
ができる。

$$I_i^c = \int_{-1}^1 \frac{\phi^i(\xi) f(\xi)}{r^\alpha} J(\xi) d\xi \quad (i = 1, 2, 3) \quad (10)$$

$$I_i^d = \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1}{r}\right) \phi^i(\xi) J(\xi) d\xi \quad (i = 1, 2, 3) \quad (11)$$

ただし、 $f(\xi)$ は外向き単位法線ベクトルなどの関数、 $J(\xi)$ は
Jacobian である。

点 \bar{z} に対応する要素無次元座標の値を ζ とすると、曲線要
素に対する変数変換則は、直線要素の場合にならない、次のよ
うにすることができる。

$$\xi = \zeta + \frac{d}{L} (\xi_L - \zeta) \sinh(s) \quad (12)$$

ただし、 $\xi > \zeta$ の場合 $\xi_L = +1$ および $L = |\bar{x}^3 - \bar{z}|$ 、 $\xi < \zeta$ の
場合は $\xi_L = -1$ および $L = |\bar{x}^1 - \bar{z}|$ であるものとする。こ
のとき、逆変換は次のようになる。

$$s = \sinh^{-1} \left(\frac{L}{d} \cdot \frac{\xi - \zeta}{\xi_L - \zeta} \right) \quad (13)$$

$\xi = 0$ および $\xi = \xi_L$ に対する s の値をそれぞれ s_0, s_L とすると,

$$s_0 = 0, \quad s_L = \sinh^{-1} \left(\frac{L}{d} \right) \quad (14)$$

また,

$$d\xi = \frac{d}{L} (\xi_L - \zeta) \cosh(s) ds \quad (15)$$

であり, 区間 $[\zeta, +1]$ の積分および区間 $[-1, \zeta]$ の積分のいずれも, $i = 1, 2, 3$ に対して次の2式の形にまとめて書くことができる.

$$I_i^c = \frac{d}{L} \xi_L (\xi_L - \zeta) \int_0^{s_L} \frac{\phi^i(s) f(s)}{r^\alpha} J(s) \cosh(s) ds \quad (16)$$

$$I_i^d = \frac{d}{L} \xi_L (\xi_L - \zeta) \int_0^{s_L} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \phi^i(s) J(s) \cosh(s) ds \quad (17)$$

式(16)と(17)において, さらに

$$s = \frac{1 + \eta}{2} s_L \quad (18)$$

と変換すれば, Gauss-Legendre 公式を用いて数値積分することができる.

3. 計算例

まず, Fig. 1 の直線要素モデルで $L = 1$ の場合について,

$$d = \frac{1}{10^k}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (19)$$

と変えた場合について, $1/r^\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$ の近特異性に対する数値積分の精度を調べた. 数値積分には8点と24点の Gauss-Legendre 公式を用い, 倍精度で計算した. Table 1~3 には, 近特異性がそれぞれ $O(1/r)$, $O(1/r^2)$, $O(1/r^3)$ の場合について, そのまま数値積分した場合と式(3)の変数変換を適用して数値積分した場合の積分の相対誤差を比較したものを示す. 表中の N_G は数値積分公式の積分点数, 'No' は「変数変換なし」, 'Yes' は「変数変換あり」を意味するものとする.

24点積分公式を用いても $O(1/r)$ の近特異性に対しては, $k = 2$, すなわちソース点の距離が要素寸法の $1/100$ になるときわめて積分の誤差が大きくなるのが分かる. これに対して式(3)の変数変換を用いた場合はソース点の距離が要素寸法の $1/1000$ のようにごく近傍にある場合も, 24点積分公式を用いれば高精度に積分できることが分かる.

Table 2 と Table 3 に示した近特異性が $O(1/r^2)$ と $O(1/r^3)$ の場合の積分についても, 同様のことが言える.

Table 1 Comparisons of the integration results by Gaussian quadrature for $1/r$ with and without transformation.

k	N_G	trans.	$1/r$	ϕ^1/r	ϕ^2/r	ϕ^3/r
0	8	No	5E-12	-1E-10	7E-11	-1E-10
		Yes	0	6E-15	5E-15	-3E-14
	24	No	-3E-15	0	-3E-15	8E-15
		Yes	-3E-15	-1E-14	3E-15	-3E-14
1	8	No	3E-04	7E-04	2E-05	-3E-04
		Yes	3E-15	1E-11	-2E-11	2E-10
	24	No	9E-12	9E-11	-7E-11	4E-10
		Yes	0	-8E-15	6E-15	-6E-01
2	8	No	3E-02	5E-02	-8E-03	4E-01
		Yes	0	1E-08	-3E-08	4E-06
	24	No	3E-04	5E-04	2E-05	-1E-03
		Yes	0	9E-15	0	-7E-13
3	8	No	3E-01	4E-01	-2E-03	9E-01
		Yes	4E-15	4E-07	-2E-06	2E-03
	24	No	3E-02	4E-02	-9E-04	5E-01
		Yes	0	-9E-15	5E-15	-1E-11

Table 2 Comparisons of the integration results by Gaussian quadrature for $1/r^2$ with and without transformation.

k	N_G	trans.	$1/r^2$	ϕ^1/r^2	ϕ^2/r^2	ϕ^3/r^2
0	8	No	2E-11	-6E-10	3E-10	-7E-10
		Yes	-9E-15	3E-13	-1E-13	2E-13
	24	No	-9E-15	-8E-15	-3E-15	0
		Yes	0	-1E-14	3E-15	-4E-14
1	8	No	2E-03	2E-03	9E-04	3E-03
		Yes	4E-09	4E-08	-8E-08	-2E-07
	24	No	4E-10	1E-09	-8E-10	-2E-09
		Yes	-1E-14	-9E-15	-2E-15	1E-14
2	8	No	2E-01	3E-01	-8E-02	-1E-01
		Yes	-2E-06	-2E-06	4E-06	5E-06
	24	No	2E-03	2E-03	1E-03	2E-03
		Yes	0	-7E-15	-7E-15	8E-15
3	8	No	9E-01	9E-01	3E-01	3E-01
		Yes	-9E-05	-9E-05	-1E-05	-1E-05
	24	No	3E-01	3E-01	-4E-02	-5E-02
		Yes	-5E-14	-6E-14	4E-15	8E-15

Table 3 Comparisons of the integration results by Gaussian quadrature for $1/r^3$ with and without transformation.

k	N_G	trans.	$1/r^3$	ϕ^1/r^3	ϕ^2/r^3	ϕ^3/r^3
0	8	No	5E-11	-2E-09	1E-09	-3E-09
		Yes	1E-14	3E-12	-1E-12	3E-12
	24	No	0	-8E-15	-5E-15	-9E-15
		Yes	7E-15	-8E-15	7E-15	-5E-14
1	8	No	4E-03	4E-03	5E-03	8E-03
		Yes	5E-07	9E-07	-9E-07	-1E-06
	24	No	3E-09	5E-09	-3E-09	-4E-09
		Yes	0	-2E-14	-4E-15	-2E-15
2	8	No	5E-01	5E-01	-8E-02	-8E-02
		Yes	-6E-05	-7E-05	6E-05	6E-05
	24	No	3E-03	2E-03	1E-02	1E-02
		Yes	0	7E-15	-3E-15	1E-15
3	8	No	1E+00	1E+00	9E-01	9E-01
		Yes	-3E-04	-3E-04	-7E-04	-7E-04
	24	No	6E-01	6E-01	3E-02	3E-02
		Yes	-1E-12	-1E-12	-3E-13	-3E-13

Table 4 Errors of integration results for $1/r^\alpha$ type integrand, calculated by Gaussian quadrature with the transformation of integration variable.

α	k	$1/r^\alpha$	ϕ^1/r^α	ϕ^2/r^α	ϕ^3/r^α
1	0	0	0	0	0
1	1	-5E-15	-6E-14	-6E-15	-7E-14
1	2	0	0	0	0
1	3	-7E-15	-2E-13	-7E-15	-2E-13
2	0	-1E-14	-9E-14	-2E-14	-9E-14
2	1	-3E-15	-1E-13	-4E-15	-1E-13
2	2	-6E-14	-2E-11	-6E-14	-2E-11
2	3	-6E-11	-2E-07	-6E-11	-2E-07
3	0	-7E-15	-5E-14	-9E-15	-6E-14
3	1	5E-15	5E-13	5E-15	5E-13
3	2	5E-15	5E-11	5E-15	2E-11
3	3	1E-12	-1E-07	1E-12	9E-08

Table 5 Errors of integration results for $\ln r$ type integrand, calculated by Gaussian quadrature with the transformation of integration variable.

k	$\ln(1/r)$	$\phi^1 \ln(1/r)$	$\phi^2 \ln(1/r)$	$\phi^3 \ln(1/r)$
0	8.73E-15	2.61E-14	2.07E-14	3.58E-14
1	5.94E-15	8.80E-14	6.80E-15	9.98E-14
6	5.07E-15	8.48E-14	5.70E-15	1.00E-13
7	-1.52E-14	-2.54E-13	-1.71E-14	-3.00E-13
8	-5.07E-14	-8.48E-13	-5.70E-14	-1.00E-12
9	-4.06E-13	-6.78E-12	-4.56E-13	-8.00E-12
10	-1.79E-12	-2.98E-11	-2.01E-12	-3.52E-11
20	-8.00E-09	-1.34E-07	-8.99E-09	-1.58E-07
30	-3.91E-07	-6.53E-06	-4.39E-07	-7.71E-06

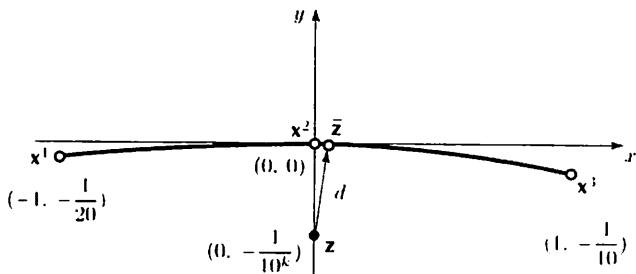


Fig. 9 A curved element and a source point configuration used for numerical tests.

次に、Fig. 3 に示すような 3 点 $x^1(-1, -\frac{1}{20})$, $x^2(0, 0)$, $x^3(1, -\frac{1}{10})$ からなる 2 次要素に対して、ソース点を $z(1, -\frac{1}{10^k})$ として k を様々にとったときを考える。このとき、変数変換を適用した積分公式 (16) を Gauss-Legendre の 24 点積分公式で数値積分した結果を Table 4 に示す。誤差を計算するためには厳密解が必要となるが、曲線要素の場合それを求めることは困難であるため、数式処理アプリケーション Maple 9.0 を用いた多倍長計算により求めた結果と比較した。

直線要素の場合と比べて、いくぶん誤差が増加しているが、ごく近傍のソース点まで精度良く評価できている。

また Table 5 には、被積分関数に $\ln r$ を含む積分を、変数変換後の積分公式 (17) を用いて計算した結果の誤差を示す。 $\ln r$ の近特異性の場合には、ソース点の位置が $(0, -10^{-10})$ という要素の極めて近くにある場合においても、高精度に積分を評価することができている。

4. 結 言

本論文では、基本解のソース点が積分する要素の近くにある場合の積分を、数値積分公式として通常用いられている Gauss-Legendre 公式で高精度に積分するための変数変換を提案した。直線要素や高次曲線要素に対する計算例から、この変数変換により境界のごく近くのソース点に対しても、Gauss-Legendre 公式により高精度に境界積分を評価できることを示した。

謝 辞 本研究の一部は、平成 15 年度科学研究費基盤研究 (C) (課題番号 15560068) の支援により行われたものである。

参考文献

- (1) K. Hayami, *A Projection Transformation Method for Nearly Singular Surface Boundary Element Integrals*, Ph.D. Thesis, Wessex Institute of Technology, April 1991.
- (2) 國廣昇, 速水謙, 杉原正顯, 境界要素法の変数変換型の自動数値積分法とその誤差解析, 日本応用数理学会論文誌, 5-1, pp. 101-119, 1995.
- (3) Y.J. Liu, Analysis of shell-like structures by the boundary element method based on 3-D elasticity: Formulation and verification, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41, pp. 541-558, 1998.
- (4) Y.J. Liu, D.M. Zhang, F.J. Rizzo, Nearly singular and hypersingular integrals in the boundary element method, *Boundary Elements XV, Vol.1: Fluid Flow and Computational Aspects*, C.A. Brebbia and J.J. Rencis (eds.), Computational Mechanics Publications, Southampton, pp. 453-468, 1993.
- (5) K. Hayami, A projection transformation method for nearly singular surface boundary element integrals, *Lecture Notes in Engineering*, C.A. Brebbia and S.A. Orszag (eds.), Vol.73, Springer-Verlag, 1992.
- (6) K. Hayami, H. Matsumoto, Quadrature for nearly singular boundary element integrals, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 13, pp. 143-154, 1994.