

## 2次元静弾性クラック周期境界値問題における高速多重極法

## AN FMM FOR PERIODIC ELASTOSTATIC CRACK PROBLEMS IN 2D

大谷 佳広<sup>1)</sup>, 西村 直志<sup>2)</sup>

Yoshihiro OTANI and Naoshi NISHIMURA

- 1) 京都大学大学院工学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: otani@mbox.kudpc.kyoto-u.ac.jp)  
 2) 京都大学学術情報メディアセンター (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: nchml@media.kyoto-u.ac.jp)

This paper presents an FMM formulation for periodic elastostatic crack problems in 2D. The periodicity of the problem is taken into account in a rigorous manner with the help of elliptic functions. The validity of the formulation is proved with a few numerical examples. The proposed method, in conjunction with homogenisation method, is applied successfully to the evaluation of effective moduli of elastic materials having many cracks.

**Key Words:** FMM, Elastostatics, Crack, Periodic Problems, Homogenisation

## 1. はじめに

境界要素法は有限要素法や、差分法などの数値解法に比べ無限遠を含むような問題(外部問題)や、クラック問題のような特異性のある問題を得意とする。しかし、係数行列を陽に評価するためには要素数  $N$  に対して  $O(N^2)$  の計算量が必要であり大規模問題を解く際のネックになっていた。しかし近年、計算量を軽減する手法の一つとして高速多重極法<sup>(1)</sup>の研究が進んでいる。多重極法では近傍の要素からの影響は直接計算するが、遠方からの影響は多重極展開としてまとめて計算する。これにより係数行列とベクトルの積の計算量を  $O(N)$  にすることができる。

一方、近年、微視構造を有する物質の巨視的な力学特性を導く理論として、均質化法<sup>(2,3)</sup>が注目されている。均質化法では微視的な周期構造を持つ物質の巨視的な性質を明らかにするが、その際に微視的な構造についての周期境界値問題を解く必要が生じる。微視的な構造が、クラックなどの解に特異性が現れるような形状を含む場合、境界要素法が有効であると考えられる。しかし境界要素法を用いた場合、前述の通り計算量が問題になる可能性が生じる。そのため、周期境界値問題の高速解法を開発することは有意義であると考えられる。

高速多重極法で周期境界値問題を扱った研究としてはGreen-gardら<sup>(4)</sup>が挙げられる。しかしながら、彼らは、絶対収束しない級数項を物理的考察により求めており、数学的にはやや意味が不明確である。松村ら<sup>(5)</sup>は、2次元Laplace方程式のクラック周期境界値問題において、この問題点を改善した。

本研究では、松村らの方法を2次元静弾性クラック問題に拡張して高速多重極境界要素法による周期境界値問題の定式化を示し、数値実験によりその妥当性を検証する。

## 2. クラック問題の定式化

ここでは、静弾性平面ひずみ問題を考える。 $\mathbb{R}^2$ 上にクラック  $S$  が分布しているとする。変位  $u_i$  は次の支配方程式を満たす( $\lambda, \mu$  は Lamé 定数)。

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus S \quad (1)$$

$$C_{ijkl} u_{k,l} n_j = g_i \quad \text{on } S \quad (2)$$

ここに、 $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$  である。

二次元静弾性学の基本解は次のように書ける。

$$G_{ij} = \frac{1}{2\pi\mu} \left[ \delta_{ij} \log \frac{1}{r} + \frac{1}{8(1-\nu)} \partial_i \partial_j (r^2 \log \frac{1}{r}) \right] \quad (3)$$

ここに、 $\nu$  はポアソン比である。基本解を用いると、支配方程式と等価な  $S$  上の境界積分方程式は次のように書ける。

$$g_a = \int_S C_{abik} C_{cdjl} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial y_l} G_{ij}(x-y) n_b(x) n_c(y) \phi_d(y) dS_y \quad (4)$$

ここに、 $\phi_i$  はクラックの開口変位である。また、変位  $u_i$  の解表示は次式で得られる。

$$u_i(x) = \int_S C_{cdjl} \frac{\partial}{\partial y_l} G_{ij}(x-y) n_c(y) \phi_d(y) dS_y \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus S \quad (5)$$

式(5)の複素表現は次のように書ける。

$$V = \frac{1}{2\pi(\kappa+1)} \int_S \left[ \frac{\kappa\nu(\zeta)U(\zeta)}{z-\zeta} + \frac{\nu(\zeta)\overline{U(\zeta)}(z-\zeta)}{(\bar{z}-\bar{\zeta})^2} + \frac{\nu(\zeta)\overline{U(\zeta)} + \nu(\bar{\zeta})U(\zeta)}{(\bar{z}-\bar{\zeta})} \right] dS_\zeta \quad (6)$$

ここに、 $V = u_1 + iu_2$ 、 $U = \phi_1 + i\phi_2$ 、 $z = x_1 + ix_2$ 、 $\zeta = y_1 + iy_2$ 、 $\nu = n_1(y) + in_2(y)$  である。また、 $\kappa = 3 - 4\nu$  である。

### 3. 多重極展開

次に、式 (6) の多重極展開を考える。以下では、 $z$  を観測点、 $\zeta$  を積分点、 $z_0$  を観測点側のセルの中心、 $\zeta_0$  を積分点側のセルの中心とする。

多重極展開の準備として、次の関数を定義する。

$$I_p(z) = \frac{z^p}{p!}, \quad O_p(z) = \frac{p!}{z^{p+1}} \quad (7)$$

ここで、 $z - \zeta = (z - z_0) + (z_0 - \zeta_0) + (\zeta_0 - \zeta)$  の形に分けて、各項について変数分離すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2\pi(\kappa+1)} \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \left[ \kappa I_q(z-z_0) \sum_{p=q}^{\infty} O_p \int_S I_{p-q} \nu U dS_\zeta \right. \\ & - (z-z_0) I_{q-1}(z-z_0) \sum_{p=q}^{\infty} O_p \int_S I_{p-q} (\zeta-\zeta_0) \nu U dS_\zeta \\ & + (z_0-\zeta_0) I_q(z-z_0) \sum_{p=q}^{\infty} O_{p+1} \int_S I_{p-q} (\zeta-\zeta_0) \nu U dS_\zeta \\ & - I_q(z-z_0) \sum_{p=q}^{\infty} O_p \int_S (\zeta-\zeta_0) I_{p-q-1} (\zeta-\zeta_0) \nu U d\zeta \\ & \left. + I_q(z-z_0) \sum_{p=q}^{\infty} O_p \int_S I_{p-q} (\zeta-\zeta_0) (\bar{\nu}U + \nu\bar{U}) dS_\zeta \right] \quad (8) \end{aligned}$$

ただし、 $I_{-1}(z) = 0$  と定義する。なお、 $O$  の引数は全て  $z_0 - \zeta_0$  である。上式の形から

$$V = \frac{1}{2\pi(\kappa+1)} \left[ \kappa \Psi(z-z_0) - (z-z_0) \overline{\Psi'(z-z_0)} + \Phi(z-z_0) \right] \quad (9)$$

と書けることが分かる。

$\Psi$  の多重極モーメント、局所展開係数をそれぞれ  $M^{(1)}$ 、 $L^{(1)}$  と書き、 $\Phi$  の多重極モーメント、局所展開係数をそれぞれ  $M^{(2)}$ 、 $L^{(2)}$  と書くことにする。式 (8) を用いると、これらの多重極モーメントは次のように計算されることが分かる。

$$M_p^{(1)}(\zeta_0) = \int_S I_p(\zeta-\zeta_0) \nu U dS_\zeta \quad (10)$$

$$\begin{aligned} M_p^{(2)}(\zeta_0) = & \int_S [I_p(\zeta-\zeta_0) (\bar{\nu}U + \nu\bar{U}) \\ & - (\zeta-\zeta_0) I_{p-1}(\zeta-\zeta_0) \nu U] dS_\zeta \quad (11) \end{aligned}$$

また、多重極モーメントの展開中心の移動 (M2M) は次式によって行われる。

$$M_p^{(1)}(\zeta_1) = \sum_{q=0}^p M_q^{(1)}(\zeta_0) I_{p-q}(\zeta_0 - \zeta_1) \quad (12)$$

$$M_p^{(2)}(\zeta_1) = \sum_{q=0}^p M_q^{(2)}(\zeta_0) I_{p-q}(\zeta_0 - \zeta_1) - \overline{(\zeta_0 - \zeta_1)} M_{p-1}^{(1)}(\zeta_1) \quad (13)$$

多重極モーメントから局所展開係数へは次式によって変換される (M2L)。

$$L_q^{(1)}(z_0) = (-1)^q \sum_{p=q}^{\infty} O_p(z_0 - \zeta_0) M_{p-q}^{(1)}(\zeta_0) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} L_q^{(2)}(z_0) = & (-1)^q \sum_{p=q}^{\infty} O_p(z_0 - \zeta_0) M_{p-q}^{(2)}(\zeta_0) \\ & - \overline{(z_0 - \zeta_0)} L_{q+1}^{(1)}(z_0) \quad (15) \end{aligned}$$

局所展開係数の展開中心の移動 (L2L) は次式によって行われる。

$$L_p^{(1)}(z_1) = \sum_{q=p}^{\infty} L_q^{(1)}(z_0) I_{q-p}(z_1 - z_0) \quad (16)$$

$$L_p^{(2)}(z_1) = \sum_{q=p}^{\infty} L_q^{(2)}(z_0) I_{q-p}(z_1 - z_0) - \overline{(z_1 - z_0)} L_{p+1}^{(1)}(z_1) \quad (17)$$

局所展開係数を用いて  $\Psi$ 、 $\Phi$  は次のように計算される。

$$\Psi = \sum_{p=0}^{\infty} L_p^{(1)}(z_0) I_p(z - z_0) \quad (18)$$

$$\Phi = \sum_{p=0}^{\infty} L_p^{(2)}(z_0) I_p(z - z_0) \quad (19)$$

式 (9) のトラクションは

$$T = \frac{\mu}{\pi(\kappa+1)} [n(\Psi' + \bar{\Psi}') - \bar{n}((z-z_0)\bar{\Psi}'' - \bar{\Phi}')] \quad (20)$$

により求まる。

### 4. 解の周期化

2次元静弾性クラック周期境界値問題は次のように表される。

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} = 0 \quad \text{in } \Omega \setminus S \quad (21)$$

$$C_{ijkl} u_{k,l} n_j = g_i \quad \text{on } S \quad (22)$$

$$u_i(x^1) = u_i(x^2) \quad (23)$$

$$C_{ijkl} u_{k,l}(x^1) n_j(x^1) = -C_{ijkl} u_{k,l}(x^2) n_j(x^2) \quad (24)$$

ここに、 $\Omega$  はユニットセル、 $\Gamma$  は  $\Omega$  の外側の境界、 $S$  はユニットセル中のクラックである。また、 $n_i$  は  $\Gamma$  における外向きの単位法線ベクトルである。 $x^1$  と  $x^2$  は  $\Gamma$  上で互いに反対側の点である。簡単のために適当に座標をとって、 $\Omega$  は原点を中心とする一辺の長さが1の正方形領域であるとする。

次に、周期境界条件を満たす解を得るため、式 (6) を周期化する。基本的なアイデアは、ユニットセルと同じセルが周期的に無限個並んでいると考えるというものである。しかし、式 (6) 中に現れる各項のレプリカを単に加えると

$$\sum_{w \in N^0} \frac{1}{z-w} \quad (25)$$

$$\sum_{w \in N^0} \frac{z-w}{(\bar{z}-\bar{w})^2} \quad (26)$$

といった絶対収束しない級数が現れるため、式の修正を要する。ここに  $N^0$  は、

$$N^0 = \{l = m + in | m, n : \text{整数}\} \quad (27)$$

なる複素数の集合である。級数を絶対収束級数にするため、 $z, \bar{z}$  に関して一次以下の項 (当然、弾性学の解である) を付け加えて和を取る。具体的には、式 (25)、(26) はそれぞれ次のように修正される。

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{w \in N} \left( \frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right) \quad (28)$$

$$z\overline{\rho(z)} + \overline{\iota(z)} = \frac{z}{\bar{z}\bar{z}} + \sum_{w \in N} \left( \frac{z-w}{(\bar{z}-\bar{w})^2} + \frac{w}{\bar{w}^2} - \frac{z}{\bar{w}^2} + \frac{2w\bar{z}}{\bar{w}^3} \right) \quad (29)$$

ここに、 $N$  は

$$N = \{l = m + in | m, n : \text{整数}, l \neq 0\} \quad (30)$$

である。式 (28) に現れる Weierstrass の  $\zeta$  関数は以下の性質を有する。

$$\zeta(z+1) = \pi + \zeta(z) \quad (31)$$

$$\zeta(z+i) = -\pi i + \zeta(z) \quad (32)$$

また、式 (29) 中の  $\rho(z)$  は下で定義される Weierstrass の  $\rho$  関数である。

$$\rho(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in N} \left( \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right) \quad (33)$$

$\rho$  関数は次のような性質を持つことが知られている。

$$\rho(z+1) = \rho(z) \quad (34)$$

$$\rho(z+i) = \rho(z) \quad (35)$$

また、 $\iota(z)$  は

$$\iota(z) = \sum_{w \in N} \left[ \frac{-\bar{w}}{(z-w)^2} + \frac{\bar{w}}{w^2} + \frac{2\bar{w}z}{w^3} \right] \quad (36)$$

と定義した。 $\iota$  は以下の性質を持つ。

$$\iota(z+1) = \iota(z) - \rho(z) + \alpha \quad (37)$$

$$\iota(z+i) = \iota(z) + i\rho(z) + i\alpha \quad (38)$$

ここに  $\alpha$  は

$$\alpha = 4 + \sum_{w \in N} \left[ \frac{2(1-2w)}{(1-2\bar{w})^2} + \frac{2(1+2w)}{(1+2\bar{w})^2} - \frac{1}{\bar{w}^2} + \frac{2w}{\bar{w}^3} \right] \sim 5.0153097 \quad (39)$$

なる定数である。以上の  $\zeta, \iota$  を用いて解は以下のように周期化される (本質的でない定数を除く)。

$$V = \frac{1}{2\pi(\kappa+1)} \int_S \left[ \kappa\nu(s)U(s)\zeta(z-s) - (z-s)\overline{\nu(s)U(s)\zeta'(z-s)} + \overline{(\nu(s)\bar{U}(s) + \bar{\nu}(s)U(s))\zeta(z-s)} + \overline{U(s)\nu(s)\iota(z-s)} - \pi(\nu\bar{U} + \bar{\nu}U)z - (\pi\kappa\nu(s)U(s) + \alpha\bar{\nu}(s)\bar{U}(s))\bar{z} \right] dS_s \quad (40)$$

式 (40) の積分の多重極法による算法を次節で述べる。

なお、ユニットセルの外周に境界を取る事により周期境界値問題を有限領域での境界値問題として解析することも可能であり、定式化も容易であると考えられる。しかし、ユニットセルの縁に沿って要素を配置する必要が生じ未知数が増えることと、後に示す数値解析結果からも分かるように係数行列が悪条件であることから、本手法の方が有利であると考えられる。

## 5. 周期境界値問題における多重極法

今、集合  $N', N''$  を次式で定義する。

$$N'' = \{l = m + in | m, n \in \{-1, 0, 1\}, l \neq 0\} \quad (41)$$

$$N' = N \setminus N'' \quad (42)$$

3 節において通常の無限領域にクラックが存在する場合の多重極法の定式化を行った。それに対し、式 (40) を多重極法で評価するためには、 $\zeta, \iota$  の  $\sum_{w \in N}$  に関する項と、 $z, \bar{z}$  の線形項を補正する必要がある。そこで、式 (40) を多重極法で計算する際の方針を以下のように定める。

1. 多重極モーメントの計算法は通常の方法と同じ。ただし、レベル 0 まで計算を行なう。
2. レベル 0 において lattice sum を評価し、 $N$  からの影響をユニットセルのレベル 0 の局所展開係数に合算。
3. レベル 0 から下向きに各レベルで局所展開係数を計算。その際  $N''$  に属するセルに対しても M2L を実行する。

最初に  $N''$  からの寄与の計算法について述べる。 $\zeta, \iota$  の  $\sum_{w \in N''}$  に関する項のうち、第 1 項は  $N''$  のセルと M2L を実行することにより評価できる。第 2 項以降は実際に和を計算し、レベル 0 の局所展開係数に組み入れる。式 (40) から、該当する部分を抜きだして計算すると、以下ようになる。

$$\begin{aligned} & \sum_{w \in N''} \left[ \int_S \left\{ \left( \frac{1}{w} + \frac{z-s}{w^2} \right) \kappa U \nu \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left( -\frac{z-s-w}{\bar{w}^2} + \frac{2w(\bar{z}-\bar{s})}{\bar{w}^3} \right) \bar{U} \bar{\nu} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left( \frac{1}{\bar{w}} + \frac{\bar{z}-\bar{s}}{\bar{w}^2} \right) (\bar{U} \nu + U \bar{\nu}) \right\} dS_s \right] \\ & = \int_S 4(\bar{z}-\bar{s})\bar{U}\bar{\nu}dS_s \\ & = 4(zM_0^{(1)}(0) - M_1^{(1)}(0)) \quad (43) \end{aligned}$$

従って、線形項まででは  $4M_0^{(1)}(0)$  が  $L_1^{(2)}(0)$  に加えられる。

次に  $N'$  からの寄与の計算法について述べる。まず、 $\zeta$  関数の  $\sum_{w \in N'}$  に関する項 (今、この項を  $\zeta^p$  と書くことにする) の多重極展開を行うと次のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_S \nu U \zeta^p(z-s) dS_s \\ & = \sum_{w \in N'} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=\max(2,p)}^{\infty} (-1)^{n-p+1} O_n(w) M_{n-p}^{(1)}(0) I_p(z) \quad (44) \end{aligned}$$

$$\int_S \overline{z\nu U \zeta^{p'}(z-s)} = \sum_{w \in N'} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=\max(2,p)}^{\infty} \overline{(-1)^{n-p+1} O_n(w) M_{n-p}^{(1)}(0) I_{p-1}(z)} z \quad (45)$$

$$\int_S \left[ (\nu \bar{U} + \bar{\nu} U) \zeta^p(z-s) - \bar{s} \nu(s) U(s) \frac{\partial}{\partial s} \zeta^p(z-s) \right] dS_s = \sum_{w \in N'} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=\max(2,p)}^{\infty} (-1)^{n-p+1} O_n(w) M_{n-p}^{(2)}(0) I_p(z) \quad (46)$$

次に、 $u(z-s)$ に関する項の多重極展開は次のようになる。

$$\int_S \nu U u(z-s) dS_s = \sum_{w \in N'} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=\max(2,p)}^{\infty} (-1)^{n-p+1} \bar{w} O_{n+1}(w) M_{n-p}^{(1)}(0) I_p(z) \quad (47)$$

これらを式(9)と見比べると、式(44)、(45)は $\Psi$ に含まれ、式(46)、(47)は $\Phi$ に含まれることが分かる。そこで、式(44)の $I_p(z)$ に係る因子が $L_p^{(1)}(0)$ に組み入れられ、式(46)、(47)の $I_p(z)$ に係る因子が $L_p^{(2)}(0)$ に組み入れられる。

以上の結果に線形項の寄与を加えることによりレベル0の局所展開係数は次のように計算される。

$$L_p^{(1)}(0) = \sum_{w \in N'} \sum_{n=\max(2,p)}^{\infty} (-1)^{n-p+1} O_n(w) M_{n-p}^{(1)}(0) + \delta_{p1} \pi \frac{M_0^{(2)}(0)}{1-\kappa} \quad (48)$$

$$L_p^{(2)}(0) = \sum_{w \in N'} \sum_{n=\max(2,p)}^{\infty} (-1)^{n-p+1} O_n(w) M_{n-p}^{(2)}(0) + \sum_{w \in N'} \sum_{n=\max(2,p)}^{\infty} (-1)^{n-p+1} \bar{w} O_{n+1}(w) M_{n-p}^{(1)}(0) - \delta_{p1} (\pi \kappa M_0^{(1)}(0) + (\alpha - 4) M_0^{(1)}(0)) \quad (49)$$

ここで、式(48)、式(49)の評価には

$$\sum_{w \in N'} O_n(w) \quad (50)$$

$$\sum_{w \in N'} \bar{w} O_{n+1}(w) \quad (51)$$

の値が $n \geq 2$ に対して必要となる。対称性から、lattice sum が非零であるのは、式(50)では $n$ が(4の倍数-1)の時に限り、式(51)では $n$ が(4の倍数+1)の時に限ることが分かる。これらのlattice sumの値はあらかじめ数値計算により求めておく。ここで $n \geq 2$ の場合、上のlattice sumは絶対収束するため、このような対称性による議論は数学的厳密さを損なわないことに注意する。ここでのlattice sumに $n \geq 2$ の場合しか現れないのは、周期化に際して $\zeta$ 、 $u$ という絶対収束級数を導入したからである。

以上により、多重極法で式(40)を評価する算法が得られた。

## 6. 均質化法

以上の周期クラック問題の高速多重極法の応用として、均質化法を取り上げる。弾性定数 $C_{ijkl}$ を有する均質な線形弾

性体を考える。この物体は、微視的なスケールにおいて多数のクラックを含み、各クラックは表面力を受けないものとする。この時、この物質の巨視的な弾性定数は、均質化法の理論により次のように求められる(詳細はLions<sup>(6)</sup>を参照されたい)。

$$C_{ijkl} - \frac{C_{ijpq}}{|\Omega|} \int_{S_c} \phi_p^{kl} n_q dy \quad (52)$$

ここに、 $\phi_j^{kl}$ は、クラック上の境界条件が、

$$C_{ijpq} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} n_j = -C_{ijkl} n_j \quad (\text{on } S_c) \quad (53)$$

で与えられる静弾性学の周期クラック境界値問題の解 $\chi_j^{kl}$ の開口変位である。以上より、巨視的な弾性係数を評価するためには、周期境界条件のもとでクラックの開口変位 $\phi_j^{kl}$ を求めなければならないことが分かる。この開口変位を求めるのに、前節まで議論してきた多重極法を用いることができる。

## 7. 数値計算

提案する周期境界値問題の多重極法を用いて数値解析を行った。

### 7.1. 直接法との解の比較

周期境界値問題における高速多重極法の解の妥当性を検証するために、従来法によって求めた開口変位(Direct)と高速多重極法によって求めた開口変位(FMM)の比較を行った。従来法では、ユニットセルの縁に要素を配置することによって周期境界条件を課した。その際、変位が定数の自由度を持つことを考慮しユニットセルの縁上の要素の一つで変位を陽に与えた。

適当な無次元化を行なってユニットセルは頂点が(-0.5, -0.5)、(-0.5, 0.5)、(0.5, -0.5)、(0.5, 0.5)の正方形とし、半クラック長0.4のクラックをFig.1に示すように配置した。クラック上の要素数は200である。また、従来法におけるユニットセル縁の要素数は1辺あたり300とした。式(22)における $g_i$ (クラック上の境界条件)は $g_i = \delta_{2i}$ (mode I)と $g_i = \delta_{1i}$ (mode II)の2通りを扱った。Lamé定数は $\lambda = \mu = 1$ とした。得られた開口変位をFig.2、3に示す。両者の結果はほぼ一致しており、本論文の手法の妥当性が示されたと言える。

離散化して得られる連立一次方程式はリスタート無しのGMRESによって解いた。収束判定基準は $10^{-5}$ とした。この時の反復回数を表1に示す。なお、多重極法の場合の前処理はリーフ内(最大要素数20)の要素の相互作用を表す行列を前処理行列とする右前処理である。従来法では前処理を行っていない。Table 1から分かるように多重極法の方が従来法よりも反復回数が少なく、前処理を施すことによりさらに良好な収束が得られることが分かる。

### 7.2. 均質化法への応用

周期境界値問題における高速多重極法を用いて、多数のクラックを含む物体の巨視的な弾性定数を計算する。

いま、微視的構造がFig.1と同様な、 $x_1$ 軸に平行な単一の直線クラックからなり、半クラック長だけが0.1となった場合を考える。ただし、物性値は $\lambda = \mu = 1$ とする。すると、式

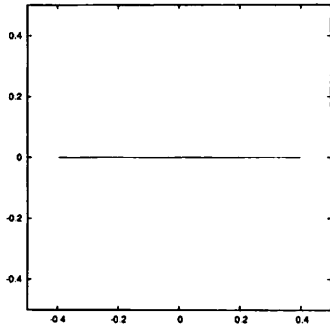


Fig. 1 ユニットセル中のクラック配置

Table 2 巨視的な弾性定数  $C_{ijkl}$  (半クラック長 0.1)

$ijkl$	クラックがない場合	クラックがある場合
1111	3	2.98
1122	1	0.933
1112	0	0
2222	3	2.80
2212	0	0
1212	1	0.976

(52)、(53)により巨視的な弾性定数は Table 2 のように求められる。これをコンプライアンス  $D_{ijkl}$  に換算すると、非 0 成分のうちクラックの影響を受けるものは  $D_{2222} = 0.3990$ 、 $D_{1212} = 1.024$  となる。これは、Horii and Sahasakmontri<sup>(7)</sup> による近似解(クラック長/クラック間隔が小さい時に有効)  $D_{2222} = 0.3989$ 、 $D_{1212} = 1.024$  と良く一致している。なお、Horii and Sahasakmontri の  $D_{2222}$  の値はグラフを読み取って求めたので、4 桁目は概数である。

次に、微視構造のクラック配置が Fig.4 であるような物体を考える。半クラック長 0.05 のクラックが中心間隔 0.125 で  $8 \times 8 = 64$  本並んでいる。クラック一本当たりの要素数は 200 であるので総自由度数は 25600 である。クラックの向きはランダムに与えた。この場合、巨視的な  $C_{ijkl}$  は、Table 3 のように求まった。

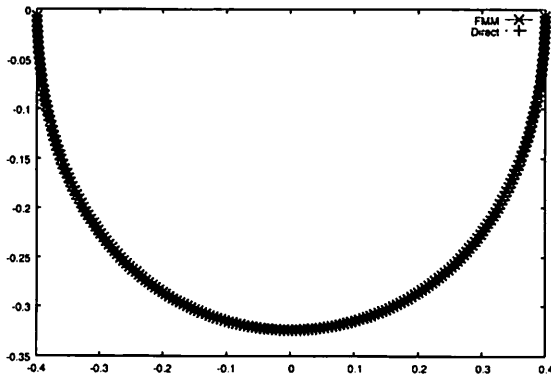


Fig. 2 mode I の場合の  $x_2$  方向開口変位

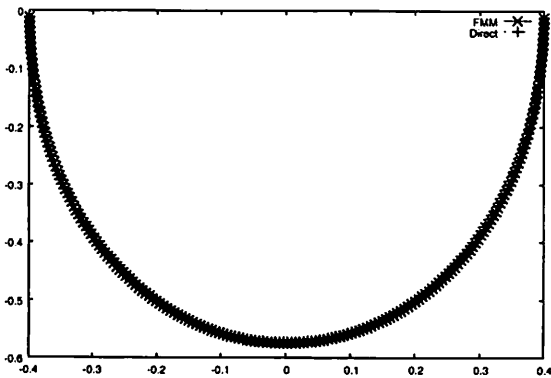


Fig. 3 mode II の場合の  $x_1$  方向開口変位

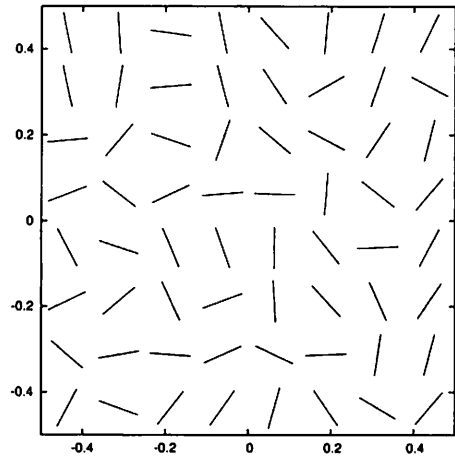


Fig. 4 クラック配置 (ランダム配置)

Table 1 反復回数

境界条件	Direct (前処理なし)	FMM (なし)	FMM (あり)
mode I	633	122	15
mode II	624	137	15

## 8. 結論

本論文では 2 次元静弾性クラック問題における周期境界値問題に対する高速多重極境界要素法の定式化を示し、数値計算によってその妥当性を検証した。また、均質化法を用いて多数のクラックを含む弾性体の巨視的な弾性定数を求めた。

今後の課題としては、インクルージョン問題における定式化、あるいは 3 次元の静弾性問題に対する定式化などが挙げ

Table 3 巨視的な弾性定数  $C_{ijkl}$  (random)

$ijkl$	クラックがない場合	クラックがある場合
1111	3	1.64
1122	1	0.249
1112	0	0.00634
2222	3	1.73
2212	0	0.00685
1212	1	0.659

られる。

### 参考文献

- (1) N. Nishimura: Fast multipole accelerated boundary integral equation methods, *Applied Mechanics Reviews*, **55**(2002), pp.299-324.
- (2) 寺田賢二郎・菊池昇: 均質化法入門, (2003), 丸善.
- (3) <http://www.civil.tohoku.ac.jp/~tei/english/homogenization.htm>
- (4) L. Greengard and V. Rokhlin: A fast algorithm for particle simulations, *Journal of Computational Physics*, **73**(1987), pp.325-348.
- (5) 松村知樹・西村直志: クラックの周期境界値問題における高速多重極法と均質化法への応用について、*計算数理工学論文集*, **4**(2004)、pp.95-100.
- (6) J.L. Lions: Remarks on some asymptotic problems in composite and in perforated materials, *Variational Methods in the Mechanics of Solids* (Ed. S. Nemat-Nasser), Pergamon, (1980), pp.3-20.
- (7) H. Horii and K. Sahasakmontri: Mechanical properties of cracked solids: validity of the self-consistent method, *Micromechanics and Inhomogeneity* (Eds. G.J. Weng, M. Taya and H. Abé), Springer (1990), 137-159.