

# 弾性板の衝撃曲げ応答を用いたパラメータ同定逆解析

## Inverse Analysis of Parameters Identification Using Dynamic Bending Responses of Elastic Plates

田中 正隆<sup>1)</sup>, 松本 敏郎<sup>2)</sup>, 山村 啓了<sup>3)</sup>

Masataka TANAKA, Toshiro MATSUMOTO and Hironori YAMAMURA

- 1) 信州大学工学部 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)  
 2) 信州大学工学部 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: toshiro@gipwc.shinshu-u.ac.jp)  
 3) 信州大学大学院工学系研究科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: bib@artist.shinshu-u.ac.jp)

This paper is concerned with application of an inverse analysis method for identification of unknown parameters corresponding to load and material constants of an elastic plate. The extended Kalman filter and the boundary element method are combined to use for the inverse analysis. The extended Kalman filter algorithm can estimate state variables of a stochastic system. It is expected that the algorithm is also applicable to analysis of other identification problems for which noisy data are available at some measuring points. The method of inverse analysis is applied to several examples of parameter identification problems, and the numerical results obtained are discussed.

**Key Words:** Elastic Plate, Dynamic Bending Vibration, Boundary Element Method, Inverse Problem, Parameter Identification

### 1. はじめに

順問題の解析ソフトウェアを用いて, 対応する逆問題の解析手法を開発する試みがなされて成功を収めている<sup>(1)</sup>. 本研究では, 弾性板に衝撃荷重が作用する非定常曲げ振動問題の境界要素解析プログラム<sup>(2)</sup>を用いて, たわみの計測値から弾性板に作用する荷重の位置, 大きさ, 時間変化のほかに, 材料定数 (Young 率, 密度) を同定する逆問題の解析手法について考察する. 拡張カルマンフィルタの理論に基づき推定すべきパラメータの値を反復計算により順次改良する逆解析手法を適用する. いくつかの例題について数値シミュレーションを行い, 逆解析手法の特性について考察する.

### 2. 弾性板の衝撃曲げに対する境界要素解析

#### 2.1 支配微分方程式

板面に垂直に荷重が作用する弾性板の強制曲げ振動問題を考える. この問題の支配微分方程式は, 外部粘性減衰を考慮して, 次式で表される.

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_b \frac{\partial w}{\partial t} = p \quad (1)$$

ただし,  $w(x, t)$  は点  $x$ , 時刻  $t$  における弾性板のたわみ,  $\rho$  は密度,  $h$  は板厚,  $c_b$  は粘性減衰係数,  $p(x, t)$  は板面に垂直に作用する強制集中外力を表し,  $\nabla^4$  は重調和作用素を表す. また,  $D$  は曲げ剛性であり, 縦弾性係数  $E$ , Poisson 比  $\nu$ , 板

厚  $h$  を用いて次式で関係づけられる.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

Laplace 変換:  $\hat{f}(x, s) = \int_0^\infty f(x, t)e^{-st} dt$  を用いた境界要素解析法では, 式 (1) に Laplace 変換を施す. 初期値はすべてゼロと仮定すれば, 式 (1) の Laplace 変換形は次式となる.

$$D\nabla^4 \hat{W}(x, s) + (\rho hs^2 + c_b s)\hat{W}(x, s) = \hat{P}(x, s) \quad (3)$$

ただし, Laplace 変換のパラメータを  $s$  とし, 変換後の関数を大文字のハット付きで表している. Laplace 変換に基づく境界要素解析法では, 式 (3) を境界積分方程式で定式化し, 一連のパラメータ  $s$  の値について解を求め, これを逆変換することにより時間依存解を得る. ここでは, 逆変換には Durbin の方法<sup>(3)</sup>を用いる.

#### 2.2 積分方程式

境界要素法による定式化には, 支配微分方程式に対する基本解が必要であるが, 本研究では静的曲げ問題に対する基本解を定式化に用いる<sup>(1)</sup>. この基本解を  $W^*$  とすれば次の微分方程式を満足する.

$$D\nabla^4 W^*(x, y) = \delta(x - y) \quad (4)$$

ただし,  $y$  は弾性板内の 1 点でありソース点と呼ぶ. また,  $\delta(x - y)$  は Dirac のデルタ関数である. 式 (4) より  $W^*$  は次のように導かれる.

$$W^*(x, y) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r \quad , \quad r = |x - y| \quad (5)$$

積分方程式の定式化では、まず式 (3) の両辺に式 (5) の基本解をかけ、領域全体について積分した次の恒等式を考える。

$$\int_{\Omega} \{D\nabla^4 \hat{W}(x, s) + (\rho h s^2 + c_b s) \hat{W}(x, s) - \hat{P}(x, s)\} W^*(x, y) d\Omega = 0 \quad (6)$$

上式の左辺について4回部分積分を繰り返すと、弾性板内の1点のたわみと境界上の諸量及び領域内のたわみとを関係づける積分方程式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \hat{W}(y) = & \int_{\Gamma} \{W^*(x, y) \hat{V}_n(x) - \Theta_n^*(x, y) \hat{M}_n(x) \\ & + M_n^*(x, y) \hat{\Theta}_n(x) - V_n^*(x, y) \hat{W}(x)\} d\Gamma \\ & - (\rho h s^2 + c_b s) \int_{\Omega} W^*(x, y) \hat{W}(x) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} W^*(x, y) \hat{P}(x) d\Omega - \sum_{k=1}^{K_c} [W^*(x, y) \hat{M}_{nt}(x)]_k \\ & + \sum_{k=1}^{K_c} [M_{nt}^*(x, y) \hat{W}(x)]_k, \quad y \in \Omega \end{aligned} \quad (7)$$

上式で  $\sum [ ]_k$  は括弧内の関数値のかど点における不連続量の全かど点数  $K_c$  に関する総和を意味する。また、 $\hat{\Theta}_n$ ,  $\hat{M}_n$ ,  $\hat{M}_{nt}$ ,  $\hat{V}_n$  はそれぞれ、法線方向たわみ勾配、曲げモーメント、ねじりモーメント、相当せん断力を表す。通常の積分が可能なオーダーまで正則化された積分方程式を用いる<sup>(2)</sup>。

### 2.3 積分方程式の正則化

はじめに、式 (7) を次のように変形する。

$$\begin{aligned} \hat{W}(y) = & \int_{\Gamma} \left[ W^* \hat{V}_n - \Theta_n^* \hat{M}_n + M_n^* \hat{\Theta}_n - Q_n^* \hat{W} + M_{nt}^* \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{t}} \right] d\Gamma \\ & - (\rho h s^2 + c_b s) \int_{\Omega} W^* \hat{W} d\Omega + \int_{\Omega} W^* \hat{P} d\Omega \\ & - \sum_{k=1}^{K_c} [W^* \hat{M}_{nt}]_k \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、次の関係を用いた。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} V_n^* \hat{W} d\Gamma & = \int_{\Gamma} \left[ Q_n^* + \frac{\partial M_{nt}^*}{\partial s} \right] \hat{W} d\Gamma \\ & = \int_{\Gamma} Q_n^* \hat{W} d\Gamma + \sum_{k=1}^{K_c} [M_{nt}^* \hat{W}]_k - \int_{\Gamma} M_{nt}^* \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{t}} d\Gamma \end{aligned} \quad (9)$$

式 (8) をさらに変形すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \hat{W}(y) = & \int_{\Gamma} \left[ W^* \hat{V}_n - \Theta_n^* \hat{M}_n + M_n^* \hat{\Theta}_n - Q_n^* \{\hat{W} - \hat{W}(y)\} \right. \\ & \left. + M_{nt}^* \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{t}} \right] d\Gamma - \left\{ \int_{\Gamma} Q_n^* d\Gamma \right\} \hat{W}(y) \\ & - (\rho h s^2 + c_b s) \int_{\Omega} W^* \hat{W} d\Omega + \int_{\Omega} W^* \hat{P} d\Omega \\ & - \sum_{k=1}^{K_c} [W^* \hat{M}_{nt}]_k \end{aligned} \quad (10)$$

ここで発散定理、式 (4) の関係を用いると次式を得る。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} Q_n^* d\Gamma & = \int_{\Gamma} M_{ij,j}^* n_i d\Gamma = \int_{\Omega} M_{ij,j,i}^* d\Omega = \int_{\Omega} (-DW_{,iij}^*) d\Omega \\ & = - \int_{\Omega} \delta(x-y) d\Omega = -1, \quad y \in \Omega \end{aligned} \quad (11)$$

上式を用いると、式 (10) は次式に帰着する。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left[ W^* \hat{V}_n - \Theta_n^* \hat{M}_n + M_n^* \hat{\Theta}_n - Q_n^* \{\hat{W} - \hat{W}(y)\} + M_{nt}^* \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{t}} \right] d\Gamma \\ & + \left\{ \int_{\Gamma} Q_n^* d\Gamma \right\} \hat{W}_{,k}(y) n_k(y) - (\rho h s^2 + c_b s) \int_{\Omega} \tilde{W}^* \hat{W} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \tilde{W}^* \hat{P} d\Omega - \sum_{k=1}^{K_c} [W^* \hat{M}_{nt}]_k = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

式 (12) がいわゆるたわみに関する積分方程式が正則化された形である。次に式 (12) をソース点  $y$  の座標で微分し、点  $y$  で定義されるベクトル  $n(y)$  ( $y \in \Gamma$  では点  $y$  の外向き法線ベクトルとする) を両辺にかけ、さらに式 (11) を用いて変形すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left[ \tilde{W}^* \hat{V}_n - \tilde{\Theta}_n^* \hat{M}_n + \tilde{M}_n^* \{\hat{W} - \hat{W}(y) - r_k \hat{W}_{,k}(y)\} \right. \\ & \left. + \tilde{M}_{nt}^* \left\{ \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{t}} - \hat{W}_{,k}(y) t_k \right\} \right] d\Gamma + \left\{ \int_{\Gamma} (\tilde{M}_n^* n_k + \tilde{M}_{nt}^* t_k \right. \\ & \left. - \tilde{Q}_n^* r_k) d\Gamma \right\} \hat{W}_{,k}(y) - \hat{W}_{,k}(y) n_k(y) - (\rho h s^2 + c_b s) \int_{\Omega} \tilde{W}^* \hat{W} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \tilde{W}^* \hat{P} d\Omega - \sum_{k=1}^{K_c} [W^* \hat{M}_{nt}]_k = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

上式において、次式の関係を用いる。

$$\int_{\Gamma} (\tilde{M}_n^* n_k + \tilde{M}_{nt}^* t_k - \tilde{Q}_n^* r_k) d\Gamma = n_k(y) \quad (14)$$

すると、式 (13) は次式に帰着する。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left[ \tilde{W}^* \hat{V}_n - \tilde{\Theta}_n^* \hat{M}_n + \tilde{M}_n^* \{\hat{\Theta}_n - \hat{W}_{,k}(y) n_k\} \right. \\ & \left. - \tilde{Q}_n^* \{\hat{W} - \hat{W}(y) - r_k \hat{W}_{,k}(y)\} + \tilde{M}_{nt}^* \left\{ \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{t}} - \hat{W}_{,k}(y) t_k \right\} \right] d\Gamma \\ & - (\rho h s^2 + c_b s) \int_{\Omega} \tilde{W}^* \hat{W} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{W}^* \hat{P} d\Omega \\ & - \sum_{k=1}^{K_c} [W^* \hat{M}_{nt}]_k = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

式 (15) がたわみ勾配に関する積分方程式の正則化された形である。本研究では式 (12) と式 (15) の2式を境界上のソース点ごとに立てるが、この2式の領域積分項には領域内部節点のたわみの未知量が含まれている。このため、内部節点の数だけソース点  $y$  が領域内部にある場合のたわみに関する積分方程式を立てる。 $x_0$  は内部ソース点  $y$  から最も近い境界上の点である。

$$\begin{aligned} \hat{W}(y) = & \int_{\Gamma} \left[ W^* \hat{V}_n - \Theta_n^* \hat{m}_n + M_n^* \hat{\Theta}_n - Q_n^* \{\hat{W} - \hat{W}(x_0)\} \right. \\ & \left. + M_{nt}^* \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{t}} \right] d\Gamma + \hat{W}(x_0) - (\rho h s^2 + c_b s) \int_{\Omega} W^* \hat{W} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} W^* \hat{P} d\Omega - \sum_{k=1}^{K_c} [W^* \hat{M}_{nt}]_k \end{aligned} \quad (16)$$

## 2.4 境界領域要素法

本研究では、以下に示すように式 (12), (15), (16) の3式を連立させ、境界領域要素法<sup>(4)</sup>を適用することにより境界の未知節点値と領域内部の節点たわみに関する連立代数方程式系が得られる。まず、式 (12) 式 (15) でソース点を境界節点ごとにとり、境界領域要素法により離散化して境界条件を適用することにより次式を得る。

$$[\mathbf{A}]\{\hat{\mathbf{X}}\} + [\mathbf{C}]\{\hat{\mathbf{W}}^i\} = [\mathbf{B}]\{\hat{\mathbf{Y}}\} + \{\hat{\mathbf{D}}\} \quad (17)$$

ここで、 $\{\hat{\mathbf{X}}\}$  は境界節点の未知量ベクトル、 $\{\hat{\mathbf{Y}}\}$  は境界節点の既知量ベクトル、 $\{\hat{\mathbf{W}}^i\}$  は内部節点の未知たわみベクトルを表し、 $[\mathbf{A}][\mathbf{B}][\mathbf{C}]$  はそれぞれの係数マトリクスを表す。 $\{\hat{\mathbf{D}}\}$  は定数ベクトルを表す。また、すべてのベクトル、マトリクス成分はすべて複素数として定義する。次に式 (16) でソース点を領域内部節点ごとにとり、同様に離散化して境界条件を適用することにより次式を得る。

$$\{\hat{\mathbf{W}}^i\} + [\mathbf{a}]\{\hat{\mathbf{X}}\} + [\mathbf{c}]\{\hat{\mathbf{W}}^i\} = [\mathbf{b}]\{\hat{\mathbf{Y}}\} + \{\hat{\mathbf{d}}\} \quad (18)$$

式 (17) と式 (18) を連立させることにより、次のような連立1次方程式系が得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{a} & \mathbf{I} + \mathbf{c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{X}} \\ \hat{\mathbf{W}}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \{\hat{\mathbf{Y}}\} + \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{D}} \\ \hat{\mathbf{d}} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

式 (19) を  $\{\hat{\mathbf{X}}\}$  と  $\{\hat{\mathbf{W}}^i\}$  について解くことにより、Laplace 変換空間におけるすべての境界未知量と内部節点たわみが求められる。

## 3. フィルタ理論を用いた逆解析手法

測定データから未知量を同定する問題は一般に非線形問題である。そこで本研究では拡張カルマンフィルタ (Extended Kalman Filter)<sup>(5)(6)(7)</sup> を繰り返し適応して推定パラメータを修正しながら解を求める方法を適用する。

弾性板の動弾性応答を、パラメータ  $x_k$  と観測量  $y_k$  を関係づける非線形確率システムと考える。このとき、このシステムは次の状態方程式と観測方程式で表すことができる。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k)\mathbf{w}_k \quad (20)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (21)$$

ここで、 $\mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k)$  はシステム雑音係数、 $\mathbf{w}_k$  はシステム雑音ベクトルを表す。これらの式を、線形化したものは拡張カルマンフィルタと呼ばれており、次の方法でパラメータ  $x_k$  の値の改良を見つけるのに用いることができる。拡張カルマンフィルタは次のように構成される。

### (i) フィルタ方程式

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\hat{\mathbf{x}}_k) \quad (22)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k} = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k[\mathbf{y}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})] \quad (23)$$

### (ii) フィルタゲイン

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k/k-1}\mathbf{H}_k^T[\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k/k-1}\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k]^{-1} \quad (24)$$

### (iii) 推定誤差共分散行列

$$\mathbf{P}_{k+1/k} = \mathbf{F}_k\mathbf{P}_{k/k}\mathbf{F}_k^T + \mathbf{G}_k\mathbf{Q}_k\mathbf{G}_k^T \quad (25)$$

$$\mathbf{P}_{k/k} = \mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k/k-1} \quad (26)$$

拡張カルマンフィルタは、観測量  $y_k$  を用いて反復回数  $k$  での非線形システムの状態量  $x_k$  に対する推定量  $\hat{x}_{k/k}$  を求めるものとなっている。上述の式を  $k=0$  でのパラメータと推定誤差共分散行列を仮定して繰り返せば、パラメータを順次改良してゆくことができる。上式で  $\mathbf{H}_k$  は観測行列 (感度行列) と呼ばれるものであって次式で与えられる。

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1^k}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1^k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1^k}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_n^k}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n^k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_n^k}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (27)$$

観測行列  $\mathbf{H}_k$  は、各ステップの  $\hat{x}_{k/k-1}$  に依存しているため反復計算の過程で逐次計算する必要がある。与えられたパラメータのもとで板のたわみは境界要素法により求めることが出来る。ここでは、式 (27) の各成分を次式による差分近似を用いて求める。

$$\left. \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|_{k/k-1} \approx \left. \frac{u_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j + \Delta \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_n) - u_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_n)}{\Delta x_j} \right|_{k/k-1} \quad (28)$$

本研究では、非定常振動逆問題を扱い、システムの状態方程式はシステムが時間的遷移構造を持たないと仮定する。また、本研究では非定常振動逆問題における状態量は時間的に変化するものを対象としているが、全時間、全空間にわたる測定データを得たうえで、時空間にわたるシステムの構造としてまとめて推定を行う。

## 4. 数値解析例と考察

前節の逆問題解析手法の有効性を検討するため、材料定数 (Young 率, 密度) または荷重の位置や大きさを同定する例題について数値解析を行う。解析対象として、Fig. 1 に示すような 1 辺 1 [m]、厚さ 0.01 [m] の正方形弾性板を考え、4 辺が単純支持されているとし、外部粘性はない ( $c_b = 0$ ) と仮定する。材料定数として、縦弾性係数  $E = 2.0 \times 10^{11}$  [Pa]、Poisson 比  $\nu = 0.3$ 、密度  $\rho = 7.8 \times 10^3$  [kg/m<sup>3</sup>] を与える。解析時間は 0.05 [s] とし、時間軸上に等間隔に 20 ステップをとる。たわみ測定値は Fig. 1 の点 1~8 において得られていると仮定する。本計算では、測定誤差は 0 と仮定し、推定誤差共分散の初期値は  $1.0 \times 10^a$  とする。与えられた条件のもとで

境界要素解析を行い、求められた数値解をたわみ測定値として与える。このデータをもとにカルマンフィルタと境界要素法を用いた逆解析手法により、弾性板に作用する荷重、着力点の位置、材料定数 (Young 率, 密度) を同定する数値シミュレーションを行う。

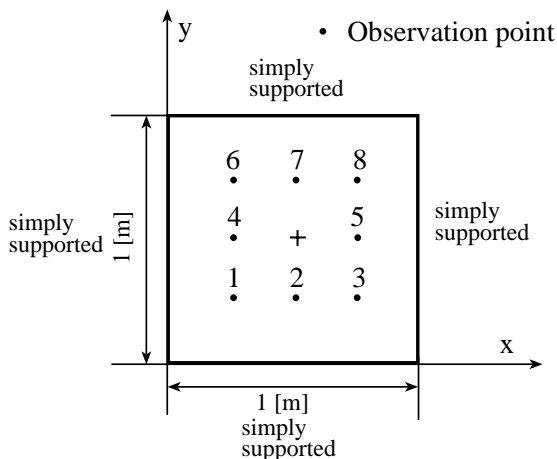


Fig.1 Analysis model

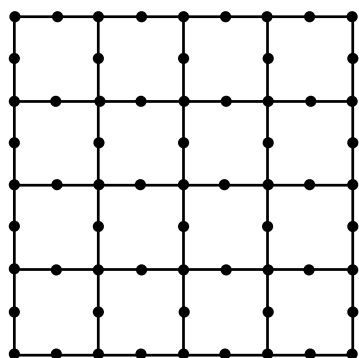


Fig.2 Discretization

まず、着力点  $(0.5, 0.5)$  と材料定数  $(E, \rho) = (200[\text{GPa}], 7.8 \times 10^3 [\text{kg/m}^3])$  が既知として、荷重の時間変化を推定したときの結果を Fig. 3 示す。Fig. 1 の点 1~8 での各時間でのたわみを観測データとして与え、荷重の各時間での大きさを  $P(t) = 50 [\text{N}]$  と仮定して逆解析を行った。推定誤差共分散値の対角項の初期値は  $1.0 \times 10^4$  とした。正解の荷重の時間変化は  $P(t) = 50\sin 40\pi t + 50 [\text{N}]$  である。

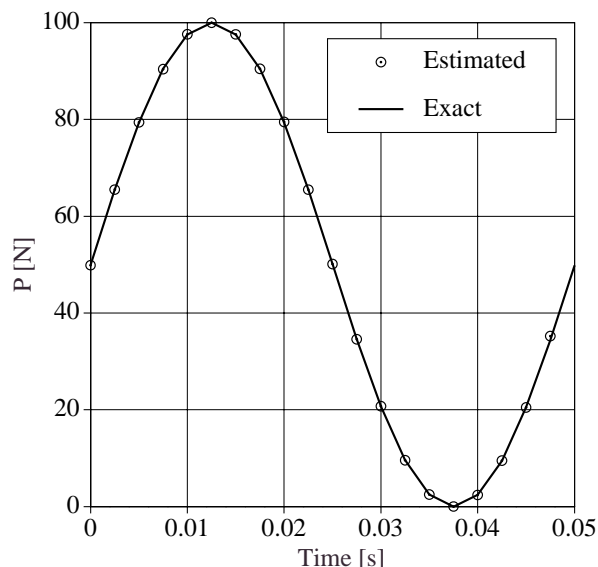


Fig.3 Estimation results of load

以上より、荷重の推定が精度良く行われていることがわかる。

次に荷重の時間変化  $P(t) = 50\sin 40\pi t + 50 [\text{N}]$  と材料定数  $(E, \rho) = (200 [\text{GPa}], 7.8 \times 10^3 [\text{kg/m}^3])$  が既知として、着力点の座標を推定したときの結果を Table 1 に示す。Fig. 1 中の点 1~8 における各時間でのたわみを観測データとして与え、表に示す値を初期パラメータとして仮定して逆解析を行う。推定誤差共分散値の対角項の初期値は  $1.0 \times 10^4$  とした。正解の着力点は  $(0.5, 0.5)$  である。いずれも推定が精度良く行われていることがわかる。Table 1 中の ( ) 内の数値は、推定値の誤差を [%] で示す。

Table 1 Estimation results of load point

Initial		Estimated	
$x [\text{m}]$	$y [\text{m}]$	$x [\text{m}]$	$y [\text{m}]$
0.35	0.35	0.4997 (-0.04201)	0.4997 (-0.04200)
0.2	0.2	0.4992 (-0.1515)	0.4992 (-0.1515)
0.5	0.35	0.5000 (0.0007)	0.4998 (-0.0206)
0.5	0.2	0.5000 (0.0041)	0.4991 (-0.1739)
0.5	0.05	0.5000 (0.0029)	0.4973 (-0.5373)

次に荷重  $P(t) = 100 [\text{N}]$  と着力点  $(0.5, 0.5)$  が既知として、Young 率と密度を推定したときの結果を Tables 2 に示す。表

中の ( ) 内の数値は、推定値の誤差を [%] で示す。観測データに関して、これまで Fig. 1 の点 1~8 における各時間でのたわみを与えていたが、それでは推定が困難であった為、場所に関しては Fig. 1 の点 1~8 について、時間に関しては、境界条件の影響をなくすため、荷重を加えたとき、境界からの波のはね返りの影響がないと考えられる時点  $t = 0.005, 0.01$  [s] の 2 点を選択し、それらの時刻でのたわみ測定値が与えられると仮定した。すなわち、計 16 個のたわみ計測値を観測データとして与えた。また、推定誤差共分散値の対角項の初期値に、Young 率、密度それぞれに  $1.0 \times 10^5$  を与えて推定を行った。表中の括弧のついていない値は推定値を示し、括弧内の値は推定値と正解値との推定誤差 [%] を示す。正解の材料定数は  $(E, \rho) = (200 \text{ [GPa]}, 7.8 \times 10^3 \text{ [kg/m}^3\text{)})$  である。いずれも推定が精度良く行われていることがわかる。

Table 2 Estimation results of material constants

Initial		Estimated	
$E$ [Pa]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$E$ [Pa]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
$1.8 \times 10^{11}$	$7.02 \times 10^3$	$2.002 \times 10^{11}$ (0.140)	$7.797 \times 10^3$ (-0.035)
$2.2 \times 10^{11}$	$8.58 \times 10^3$	$2.003 \times 10^{11}$ (0.1539)	$7.797 \times 10^3$ (-0.0263)
$1.4 \times 10^{11}$	$5.46 \times 10^3$	$1.999 \times 10^{11}$ (-0.032)	$7.782 \times 10^3$ (-0.229)
$2.6 \times 10^{11}$	$10.14 \times 10^3$	$2.002 \times 10^{11}$ (0.138)	$7.796 \times 10^3$ (-0.040)
$1.0 \times 10^{11}$	$3.9 \times 10^3$	$2.062 \times 10^{11}$ (3.102)	$7.242 \times 10^3$ (-7.153)
$3.0 \times 10^{11}$	$11.7 \times 10^3$	$2.001 \times 10^{11}$ (0.044)	$7.790 \times 10^3$ (-0.120)

次に材料定数  $(E, \rho) = (200 \text{ [GPa]}, 7.8 \times 10^3 \text{ [kg/m}^3\text{)})$  が既知として、荷重と着力点の座標を同時に推定したときの結果を Fig. 4 と Table 3 に示す。Table 3 の ( ) 内の数値は推定値の誤差を [%] で示す。Fig. 1 の点 1~8 における各時間でのたわみを観測データとして与え、荷重の大きさを  $P(t) = 50$  [N]、着力点の座標を  $(0.3, 0.3)$  と仮定し、逆解析を行う。正解の荷重は  $P(t) = -160000(t - 0.025)^2 + 100$  [N]、着力点は  $(0.5, 0.5)$  である。この場合は、極めて良好な推定結果が得られている。

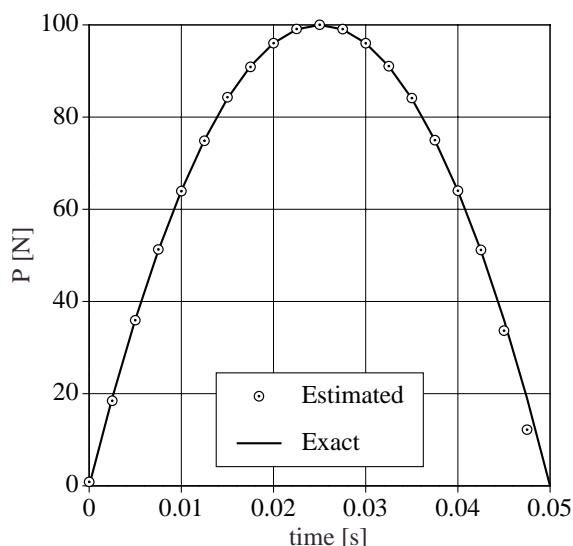


Fig. 4 Estimation results of load and load point

Table 3 Estimation results of load point

Initial		Estimated	
$x$ [m]	$y$ [m]	$x$ [m]	$y$ [m]
0.3	0.3	0.4999 (-0.001145)	0.4999 (-0.001145)

次に着力点  $(0.5, 0.5)$  が既知として、材料定数と荷重の大きさを同時に推定したときの結果を Table 4 に示す。Fig. 1 の点 1~8 における時間軸上の 2 点 (材料定数推定の際に用いた時刻) でのたわみを観測データとして与え、荷重の大きさを  $P(t) = 50$  [N]、材料定数である Young 率を  $180$  [GPa]、密度を  $7.02$  [kg/m<sup>3</sup>] と仮定して逆解析を行う。推定誤差共分散の初期値に、荷重に対応する項には  $1.0 \times 10^4$  と与え、Young 率、密度にそれぞれ  $1.0 \times 10^{-10}$  を与えた。表中の括弧のついていない値がそれぞれの推定値、括弧内の値が推定値と正解値との推定誤差 [%] を示す。正解の材料定数は  $(E, \rho) = (200 \text{ [GPa]}, 7.8 \times 10^3 \text{ [kg/m}^3\text{)})$ 、荷重は  $P(t) = 100$  [N] である。

材料定数と荷重の同時推定に関してはあまり良い結果が得られていない。

次に荷重と着力点の座標と材料定数すべてを同時に推定したときの結果を Table 5 に示す。Fig. 1 の点 1~8 において時間軸上の 2 点 (材料定数推定の際に用いた時刻) でのたわみを観測データとして与え、荷重の大きさを  $P(t) = 50$  [N]、着力点の座標を  $(0.4, 0.4)$ 、Young 率を  $180$  [GPa]、密度を  $7.02$  [kg/m<sup>3</sup>] と仮定して逆解析を行う。推定誤差共分散の初期値に、荷重の大きさと着力点に対応する項にはそれぞれ  $1.0 \times 10^4$ 、Young 率と密度にそれぞれ  $1.0 \times 10^{-10}$  の値を仮定する。表中の括弧のついていない値が推定値、括弧内の値が推定値と正解値との推定誤差 [%] を示す。正解の

Table 4 Estimation results of material constants and load

Initial		
$E$ [Pa]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$P$ [N]
$1.8 \times 10^{11}$	$7.02 \times 10^3$	50.0
Estimated		
$E$ [Pa]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$P$ [N]
$1.802 \times 10^{11}$ (-9.898)	7.013 (-10.078)	89.890 (-10.109)

材料定数は  $(E, \rho) = (200 \text{ [GPa]}, 7.8 \times 10^3 \text{ [kg/m}^3\text{)})$  , 荷重は  $P(t) = 100 \text{ [N]}$  , 着力点は  $(0.5, 0.5)$  である .

Table 5 Estimation results of material constants and load and load point

Initial				
$E$ [Pa]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$x$ [m]	$y$ [m]	$P$ [N]
$1.8 \times 10^{11}$	$7.02 \times 10^3$	0.4	0.4	50
Estimated				
$E$ [Pa]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$x$ [m]	$y$ [m]	$P$ [N]
$1.706 \times 10^{11}$ (-14.686)	$6.595 \times 10^3$ (-15.437)	0.5019 (0.383)	0.5019 (0.383)	84.682 (-15.317)

この場合, 着力点に関しては精度良く推定が行えているが, 材料定数, 荷重の推定に関しては良い結果が得られていない. 材料定数と他のパラメータとの同時推定はかなり困難であることがわかる .

## 5. 結言

以上の結果より, 本解析手法により, 良好なパラメータ同定を行うには, 観測データ, パラメータ初期値, 推定誤差共分散の初期値の設定を適切に行わなければならないことがわかる. 荷重の推定, 着力点の推定, 材料定数の推定をそれぞれ別々に行うときは, いずれの要因の影響も小さく, 良好な推定結果が得られることが例題解析から明らかになった. しかし, 材料定数と他のパラメータの同時推定に関しては, 観測データと推定誤差共分散の初期値の影響を強く受けることがわかる. 特に材料定数に対する推定誤差共分散の初期値を非常に小さくしなければ推定が不可能であることがわかった. 逆解析で良好な結果を得るには, 観測データの種類や選定方法などが大きな影響を与えることが予想される. これらの諸点に関する考察と解決策は今後の課題として取り組む予定である .

## 参考文献

- (1) M. Tanaka, G. S. Dulikravich, Inverse Problems in Engineering Mechanics II, Elsevier, (2000).
- (2) 田中正隆, 松本敏郎, 寿台悟, 計算工学講演論文集, 4-2, (1999), 1015-1018.
- (3) F. Durbin, Computer Journal, 17-4, (1974), 371-377.
- (4) M. Tanaka, T. Matsumoto, A. Shiozaki, Computers & Structures, 66-6, (1998), 725-735.
- (5) 有本卓, カルマンフィルタ, 産業図書, 1997.
- (6) 中野道雄 (監修), 西山清 (著), パソコンで解くカルマンフィルタ, 丸善, 1993.
- (7) 片山徹 (著), 応用カルマンフィルタ, 朝倉書店, 1983.