

# モード分解を利用したSH板波の散乱解析

## APPLICATION OF MODE DECOMPOSITION TO SCATTERING ANALYSIS OF SH PLATE WAVES

グナワン アリーフ<sup>1)</sup>, 廣瀬壯一<sup>2)</sup>

Arief GUNAWAN and Sohichi HIROSE

1) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒 152-8552 目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: arief@qnde.mei.titech.ac.jp)

2) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒 152-8552 目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: shirose@cv.titech.ac.jp)

The scattering analysis of SH plate waves is carried out using the boundary element method (BEM) in conjunction with mode decomposition. First the conventional boundary element method is applied to an interior domain with the waveguide regions where SH plate waves are generated by a scatterer and artificial boundaries set on the left and right edges. Second the solutions obtained by the BEM are decomposed into SH plate modes. Reflection and transmission coefficients are determined from the amplitudes of the decomposed SH waves. Some numerical examples are shown to show the applicability of SH plate waves to nondestructive evaluation of a defect in a plate.

**Key Words:** Mode Decomposition, Scattering, Plate, SH Wave, Boundary Element Method

### 1. はじめに

板波探傷法は薄板における欠陥の非破壊検査法として従来から用いられている手法である。板波は縦波や横波などの実体波に比べて減衰が小さいので、鋼板全域にわたって検査できるという利便性がある。しかし、板波は、複数の波動モードが存在する上、伝播速度が周波数に依存する分散特性を有する。そのため、板波の散乱特性について未知な部分が多く、欠陥の形状や位置、そして使用した板波モードによっては検出されにくい欠陥が存在している。板波探傷法を最適な条件下で運用するためには、欠陥との相互作用を含めた波動解析を行う必要がある。

板波の解析に関してはすでにいくつかの研究報告がなされている。Koshihara<sup>(1)</sup>は有限要素法を用いて、SH板波の散乱問題を解析している。Karlsson<sup>(2)</sup>はT-matrix法を用いて板内部の空洞による散乱問題を解いている。廣瀬<sup>(3)</sup>はGreen関数を組み込んだ境界要素法によって板内部のき裂によるSH波の散乱問題を解析している。また、Cho, Roseら<sup>(4)-(6)</sup>、林ら<sup>(7)</sup>は、境界要素法と板波の固有モード展開法を結合させたハイブリッド境界要素法を用いて、板端部での反射ならびに表面欠陥による散乱問題を解析している。以上のように板波の解析についてはそれぞれ手法に工夫を凝らした特徴のある解法が提案されている。

本研究では、モード分解を利用した境界要素法による板波の新たな散乱解析手法を提案する。波動解析自体は、通常境界要素法を用いてある有限領域での内部境界値問題を必要な複数組について解くものである。その後、板

波の性質を利用して、境界要素法によって得られた解をモード分解し、あるモードの入射波が入射したときの反射板波ならびに透過板波の振幅を求める。

### 2. 解くべき問題

Fig. 1に示すように、厚さ $2h$ で水平方向には無限に続く2次元均質等方線形な弾性板 $D$ を考える。板の左側から角周波数 $\omega$ で振動する時間調和なある振動モードのSH板波が入射し、板内部に存在する空洞 $D_c$ によって散乱されるものとする。このときSH波の全変位場 $u$ は入射波 $u^{in}$ と散乱波 $u^{sc}$ の和によって表され、いずれの変位場も以下の運動方程式を満足する。

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + k_T^2 u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in D \quad (1)$$

ここに、 $k_T$ は $k_T = \omega/c_T$  ( $c_T$ はSH波の波速)で定義される波数である。板の上下面 $B$ ならびに空洞の境界面 $S$ では、応力ゼロであるとする、以下の境界条件が与えられる。

$$t(\mathbf{x}) \equiv \mu \partial u(\mathbf{x}) / \partial n(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S \text{ and } B \quad (2)$$

ここに、 $\partial/\partial n$ は法線方向微分を表わし、 $\mu$ はせん断剛性を表わす。また、散乱波は次に述べる放射条件を満足しなければならない。すなわち、散乱体は空洞 $D_c$ のみなので、散乱波は空洞から左右の無限遠に伝播する成分のみからなり、左右の無限遠から空洞に向かって伝播する波動成分は入射波以外には存在しない。

以上のように解くべき問題は、数学的には境界条件(2)と左右無限遠での放射条件を満足する運動方程式(1)の

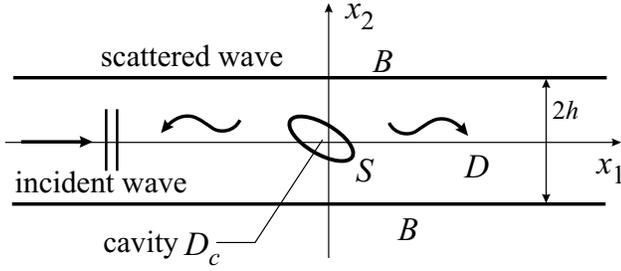


Fig.1 Scattering in a plate.

解を見つけることに帰着される．ただし，板波探傷法のシミュレーションにおいては，あるモードの入射波が欠陥に入射したときに，どのようなモードの反射波，透過波がいかなる割合で発生するかが興味の対象となるので，単に方程式の解を見出すだけでなく，単位振幅を持つモード  $j$  の入射波に対するモード  $i$  の反射波の振幅  $r_i^j$ ，あるいは，透過波の振幅  $t_i^j$  を求めることを目的とする． $r_i^j, t_i^j$  をそれぞれ反射係数および透過係数と呼ぶ．

### 3. 積分方程式

最終的に解析したい問題は Fig. 1 に示した無限に長い板における散乱問題である．ここで Fig. 2 に示すように，空洞の境界  $S$  から十分離れた  $x = \pm a$  において仮想境界  $C$  を設け，境界  $B$  の内， $|x| < a$  の範囲にある部分を  $B'$  とする． $S, B', C$  によって囲まれた内部領域  $D'$  について積分方程式を構成すると，

$$\begin{aligned} & \int_C U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t(\mathbf{y}) ds_y - \int_C T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) ds_y \\ & - \int_{S+B'} T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) ds_y \\ & = \begin{cases} u(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D' \\ u(\mathbf{x})/2, & \mathbf{x} \in S, B' \text{ and } C \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3) \end{aligned}$$

を得る．ここに， $U(\mathbf{x}, \mathbf{y}), T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  は以下に与えられる基本解である．

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(k_T r) \quad (4)$$

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \mu \frac{\partial}{\partial n_y} U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{ik_T}{4} H_1^{(1)}(k_T r) \frac{\partial r}{\partial n_y} \quad (5)$$

ここに， $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ ， $H_n^{(1)}$  は第一種  $n$  次ハンケル関数である．なお，式 (3) において境界条件 (2) はすでに考慮している．

式 (3.b) は通常の内領域に対する境界積分方程式であるが，仮想的に設定した境界  $C$  における境界条件が与えられなければ解くことはできない．以下においては，境界  $C$  上において複数組の適当な境界条件を与えて式 (3.b) を解き，その後，得られた解を板波の性質を利用してモー

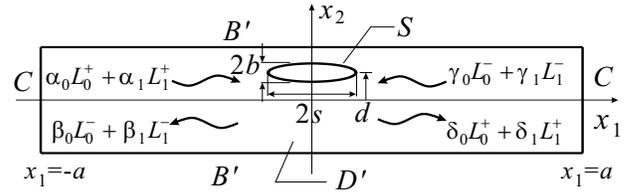


Fig.2 Propagation of SH plate waves in a finite region.

ド分解し，反射板波ならびに透過板波の振幅を求める方法を示す．

### 4. モード分解を用いた散乱解析

時間調和な 2 次元弾性波動場において，入射波以外の板波は板内部の散乱体や板端部などの不整形部によって発生する．そして，一度発生した板波各モードは不整形部からある程度離れば減衰せずに一定の振幅を示して伝播する．例えば，Fig. 2 に示すような有限な内部領域における解析モデルを考える． $x_1 = \pm a$  における左右の境界  $C$  において適当な境界条件を与え，その他の境界  $B, S$  においては応力ゼロの境界条件を与えて波動場を求めたしよう．このとき，左右の境界  $C$  や空洞の境界  $S$  から 1 波長程度離れた中間部分では板波が伝播していて，そこでの波動場を各板波モードに分解すると，モードごとの振幅は座標  $x_1$  によらず一定値になっていると考えられる．例えば，簡単のため， $L_0$  と  $L_1$  の 2 つの板波モードが存在すると仮定し， $x_1$  軸の正方向に進行する板波を  $+$ ，負の方向に進む板波を  $-$  を付けて表わす．すると，Fig. 2 に示すように，境界  $C$  および  $S$  から 1 波長程度離れた部分における波動場は  $L_0^\pm$  と  $L_1^\pm$  の 4 つの板波モードの重ね合わせによって表すことができ，各モードの係数  $\alpha_0, \alpha_1, \dots$  は一定の値をとる．

さて，左端の境界  $C$  がなければ空洞の左側で発生した板波は左方の無限遠方まで伝播していくはずである．右端の境界  $C$  についても同様のことが言える．よって，Fig. 2 に示した各モードに分解された波動場は，左右の境界  $C$  がない無限板において， $\alpha_i L_i^+$  と  $\gamma_i L_i^-$  を入射波， $\beta_i L_i^-$  と  $\delta_i L_i^+$  を散乱波と見なした波動場と等価なものと考えることができる．このような入射波と散乱波の関係を次のように表すことにする．

$$\begin{aligned} & \alpha_0 L_0^+ + \alpha_1 L_1^+ + \gamma_0 L_0^- + \gamma_1 L_1^- \\ & \rightarrow \beta_0 L_0^- + \beta_1 L_1^- + \delta_0 L_0^+ + \delta_1 L_1^+ \quad (6) \end{aligned}$$

第 2 節で述べたように，最終的に求めたいのは，単位振幅を持つモード  $j$  の入射波に対するモード  $i$  の反射波の振幅  $r_i^j$  とモード  $i$  の透過波の振幅  $t_i^j$  である．ここで，散乱体である空洞は  $x_2$  軸に関して左右対称であるとする．ただし，この仮定は以下の説明を簡単にするためで定式化の一般性を失うものではない．今，無限長さの板にお

いて，単位振幅を持つ入射板波  $L_j^+$  が左側から入射したとすると，そのときの反射波  $L_i^-$  と透過波  $L_i^+$  の振幅はそれぞれ反射係数  $r_i^j$  と透過係数  $t_i^j$  に相当する．これを式 (6) と同様の形式で表すと，次のようになる．

$$1 \times L_0^+ \rightarrow r_0^0 L_0^- + r_1^0 L_1^- + t_0^0 L_0^+ + t_1^0 L_1^+ \quad (7)$$

$$1 \times L_1^+ \rightarrow r_0^1 L_0^- + r_1^1 L_1^- + t_0^1 L_0^+ + t_1^1 L_1^+ \quad (8)$$

同様に，無限長さを持つ板の右側から単位振幅の入射板波  $L_j^-$  が入射したときの反射波  $L_i^+$  と透過波  $L_i^-$  の振幅は，空洞が左右対称であるという仮定から，それぞれ反射係数  $r_i^j$  と透過係数  $t_i^j$  に相当する．よって，

$$1 \times L_0^- \rightarrow t_0^0 L_0^- + t_1^0 L_1^- + r_0^0 L_0^+ + r_1^0 L_1^+ \quad (9)$$

$$1 \times L_1^- \rightarrow t_0^1 L_0^- + t_1^1 L_1^- + r_0^1 L_0^+ + r_1^1 L_1^+ \quad (10)$$

を得る．式 (7), (8), (9), (10) のそれぞれに  $\alpha_0, \alpha_1, \gamma_0, \gamma_1$  を掛け，足し合わせた右辺と式 (6) の右辺における  $L_i^\pm$  の係数が等しいとくと，次式を得る．

$$\begin{aligned} \alpha_0 r_0^0 + \alpha_1 r_1^0 + \gamma_0 t_0^0 + \gamma_1 t_1^0 &= \beta_0 \\ \alpha_0 r_1^0 + \alpha_1 r_1^1 + \gamma_0 t_1^0 + \gamma_1 t_1^1 &= \beta_1 \\ \alpha_0 t_0^0 + \alpha_1 t_0^1 + \gamma_0 r_0^0 + \gamma_1 r_1^0 &= \delta_0 \\ \alpha_0 t_1^0 + \alpha_1 t_1^1 + \gamma_0 r_1^0 + \gamma_1 r_1^1 &= \delta_1 \end{aligned} \quad (11)$$

式 (11) において， $r_i^j, t_i^j$  ( $i, j = 0, 1$ ) の 8 個の係数は未知数であり， $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$  ( $i = 0, 1$ ) は Fig. 2 における有限領域の左右の境界  $C$  に適当な境界条件を与えて得られた SH 板波モードの振幅値の一組である．よって，互いに独立な 2 組の境界条件を境界  $C$  において与えて解析し，2 組の  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$  を求めれば 8 個の方程式を構成することができ，反射係数  $r_i^j$  と透過係数  $t_i^j$  を求めることができる．

第 3 節で述べた境界積分方程式を用いた解析では，すべての板波モードの波動場が重なり合った全変位が得られる．そのため，本研究では，境界  $C$  や空洞の境界  $S$  から 1 波長程離れた領域における変位分布に対して重回帰分析を行って各板波モードに分解し，その振幅値  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$  を求めた．

以上，欠陥が左右対称の場合を例に挙げて定式化を示したが，欠陥が左右対称でないときにも同様な手法を適用することができる．非対称な欠陥の場合は，左右の入射波に対する反射係数と透過係数が異なるため，未知数が 16 個となる．よって，Fig. 2 の有限領域の解析において 4 組の独立な境界条件を境界  $C$  において与えて解析すれば，求めるべき係数を決定することができる．

## 5. 結果および考察

Fig. 2 に示すような楕円形の空洞による SH 板波の散乱問題を考える．楕円の形状は  $s = h/2, b/s = 0.2$  とし，

板中央面から空洞中心までの距離を  $d$  とする．入射波は 0 次あるいは 1 次モードの SH 板波であるとする．すなわち，入射波の変位は

$$u^{in} = g(x_2) \exp[ikx_1], \quad g(x_2) = \begin{cases} \cos qx_2 & (n = 0, 2, \dots) \\ \sin qx_2 & (n = 1, 3, \dots) \end{cases} \quad (12)$$

によって与えられる．ただし， $n$  はモードの次数を表し， $qh = n\pi/2, k^2 = k_T^2 - q^2$  である．

Fig. 3 は， $d = 0$  なる板の中央に楕円空洞がある場合の反射係数  $r_i^j$  と透過係数  $t_i^j$  を，横軸に無次元化波数  $k_T h$  をとって示したものである．この図の (a) と (b) はそれぞれ 0 次モードと 1 次モードの SH 板波が入射した場合の結果を示している．板の中央に空洞がある場合には幾何形状が上下対称となるので，奇数次モードの入射波が入射した場合には奇数次モードの散乱波のみが生じ，偶数次モードの入射波に対しては偶数次モードの散乱波のみが生じている．図 (a) の 0 次モードの SH 板波の入射の場合には，第 2 次モードのカットオフ波数である  $k_T h = \pi$  付近を除いて  $t_0^0 \approx 1$  であり，ほとんどの入射エネルギーが反射することなく透過波として通過していることがわかる．一方，図 (b) より 1 次モードの SH 板波が入射した場合には 1 次モードならびに 3 次モードのカットオフ波数である  $k_T h = \pi/2, 3\pi/2$  付近の他， $k_T h = 4$  付近において透過係数が減少して，大きな振幅を持った反射波が発生していることがわかる．

Fig. 4 は， $d/h = 1/2$  だけ偏心した位置に楕円空洞がある場合の反射係数  $r_i^j$  と透過係数  $t_i^j$  を，横軸に無次元化波数  $k_T h$  をとって示したものである．図 (a) と (b) はそれぞれ 0 次モードと 1 次モードの入射波に対する結果である．板中央に空洞があった Fig. 3 と異なり，入射モードに関わらず偶数次と奇数次のすべての板波モードが発生していることがわかる．図 (a) より 0 次モードの入射 SH 板波の場合は Fig. 3(a) と同様，波動エネルギーの大部分が透過波として通過している．しかし，1 次モードの SH 板波が入射する図 (b) には， $k_T h = \pi/2, 3\pi/2$  付近の他， $k_T h = 2.7$  付近において透過係数が減少して，大きな振幅を持った反射波が発生していることが示されている．

ここで，Fig. 3 の  $k_T h = 4$  ならびに Fig. 4 の  $k_T h = 2.7$  というカットオフ波数以外の波数において発生する反射係数  $r_1^1$  のピークに着目する．Fig. 5 は様々な空洞深さ  $d/h$  と反射係数がピーク値を示すときの無次元化波数  $k_T h$  の関係を表したものである． $d/h \geq 0.2$  においては  $d/h$  と  $k_T h$  は一対一の関係があり，ピーク値の波数から空洞の深さ  $d$  が推定できる可能性が示されている．

## 6. 結言

本研究では，板波のモード分解を利用した板内部の空洞による散乱解析法を示した．解析そのものは内部領域

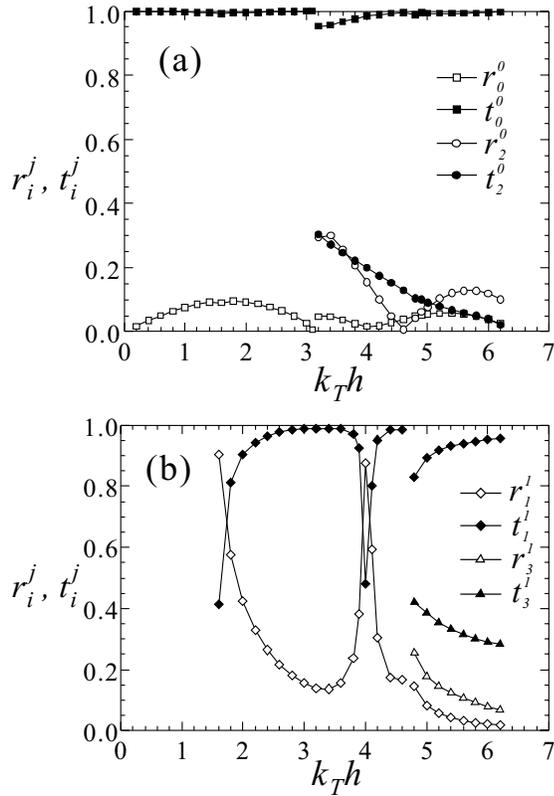


Fig.3 Coefficients of reflection and transmission as a function of wavenumber  $k_T h$ . The SH plate waves of (a) the zero order and (b) the first order are incident to the elliptic cavity located at  $d = 0$ .

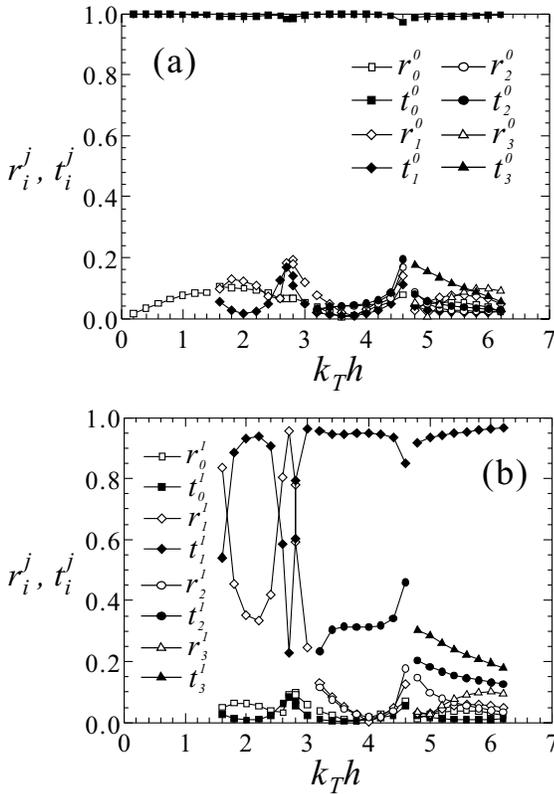


Fig.4 The same as Fig. 3, but for the the elliptic cavity located at  $d/h = 1/2$ .

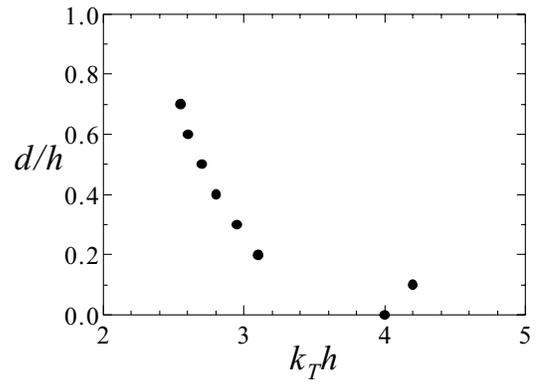


Fig.5 The relation between the cavity depth  $d$  and the wavenumber  $k_T h$  where the reflection coefficient  $r_1^1$  shows a peak value.

問題を通常の境界要素法で行っており、特に新規性はないものの、境界要素法による結果をモード分解した後処理をすることによって、モード毎の反射係数と透過係数を計算することができた。境界要素法の計算において左右の仮想境界で与える複数の境界条件をいかに独立にとるかなどの計算上の問題点は残されているが、本手法はSH板波のみならず、面内板波や棒、パイプなどの様々なウェーブガイド中の波動問題へ拡張できるものと考えられる。

#### 参考文献

- (1) M. Koshiba, S. Karakida and M. Suzuki: Finite-element analysis of Lamb wave scattering in an elastic plate waveguide, IEEE Trans. Sonics Ultrason. **SU-31** (1984) pp.18-25.
- (2) A. Karlsson: Scattering of Rayleigh Lamb waves from a 2d-cavity in an elastic plate, Wave Motion **6** (1984) pp.205-222.
- (3) 廣瀬壮一: SH板波の散乱解析への境界要素法の応用, 境界要素法論文集 **14** (1997) pp.43-46.
- (4) Y. Cho and J. L. Rose: A boundary element solution for a mode conversion study on the edge reflection of Lamb waves, J. Acoust. Soc. Am. **99** (1996) pp.2097-2109.
- (5) Y. Cho, D. D. Hongerholt and J. L. Rose: Lamb wave scattering analysis for reflector characterization, IEEE Trans. Ultrason., Ferro. Freq. Cont. **44** (1997) pp.44-52.
- (6) J. L. Rose: Ultrasonic Waves in Solid Media, Cambridge Univ. Press (1999)
- (7) 林 高弘, 琵琶志朗, J. Ch. Choi, 遠藤茂寿: ハイブリッド境界要素法を用いた大領域ラム波シミュレーション, 日本機械学会論文集 (A 編) **65** No.630 (1999) pp.210-217.