

境界要素法における計算点解析法の 傾斜機能材料の熱伝導問題への適用

APPLICATION OF COMPUTING POINT METHOD IN BEM TO THERMAL CONDUCTION IN FUNCTIONALLY GRADIENT MATERIALS

神谷紀生¹⁾, 鈴木崇之²⁾

N.Kamiya and T.Suzuki

¹⁾名古屋大学大学院人間情報学研究科 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町 E-mail:b41861a@nucc.cc.nagoya-u.ac.jp)

²⁾名古屋大学大学院人間情報学研究科 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町 E-mail:taksu@yd5.so-net.ne.jp)

Computing Point Analysis scheme in the Boundary Element Method, proposed earlier by one of the present authors, is applied to stationally thermal conduction problem in functionally gradient material (FGM). Thermal conductivity in the FGM varies in order to fit its utility. Thus the governing equation for its thermal conduction is written by the Poisson equation in terms of temperature with the inhomogeneous term including temperature derivative with respect to the coordinates. The computing point method can solve the above-mentioned problem and is shown by some numerical examples.

Key Words: Boundary Element Method, Computing Point Method, Functionally Gradient Material

1. はじめに

著者らは、非線形あるいは非同次問題を境界だけの離散化によって解析する境界要素法の「計算点解析法(Computing Point Method)」^{(3)~(6)}と名づける方法を提案した。この方法は、従来このための方法として知られていた「二重相反法(DRM)」⁽¹⁾あるいは「多重相反法(MRM)」⁽²⁾とは違ったもので、構成される方程式が特異にならない特徴をもっている。種々の非線形問題に適用して、その有効性が示された。

傾斜機能材料(FGM)の定常熱伝導問題は、非同次項に未知数の導関数を含む微分方程式で表される。DRMでこのような問題を扱う方法はすでに示されており、FGMの熱伝導問題は田中ら^{(7),(8)}が解析している。本研究では計算点解析法を同様な問題に適用して検討する。

2. 計算点解析法の概要

方法の詳細は文献^{(3)~(6)}に示されているので、ここでは概要を説明する。2次元領域 Ω (その境界を Γ とする)においてつぎの非線形 Poisson 方程式を考える。

$$\nabla^2 u(x, y) + b(x, y, u, \partial u / \partial x, \partial u / \partial y, \dots) = 0 \quad (2.1)$$

ここで、 u は未知関数、 b は非同次項であって、未

知関数とその導関数を含むものとする。Laplace 方程式の基本解を用いて、式(2.1)を積分方程式に変換すれば、 b と基本解の積が領域積分として現われる。この領域積分は、 b を次のように近似し、相反定理を適用することにより、境界積分に変換される。

$$b = \sum_{j=1}^{15} c_j r_j(x, y) \quad (2.2)$$

ここで、 r_j は x, y に関する4次までの完全多項式の各項、すなわち $1, x, y, x^2, \dots, y^4$ をとるものとする。複雑な関数のふるまいについては、領域を部分領域に分けて、これらごとにこのような近似を用いる。境界に n 個の境界要素をとり、境界積分方程式を離散化し、 n 個の境界選点について次の方程式系を得る。

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{c} \quad (2.3)$$

同様に、 m 個の内部選点について、積分方程式を離散化した式を得る。

$$2 \mathbf{u}' + \mathbf{H}'\mathbf{u} = \mathbf{G}'\mathbf{q} + \mathbf{D}'\mathbf{c} \quad (2.4)$$

式(2.3)、(2.4)において $\mathbf{u}, \mathbf{q}, \mathbf{u}'$ は、境界選点上の u, q

および内部選点上の u のベクトルである ($q \equiv \partial u / \partial v$: u の外向き法線 v 方向の導関数) . \mathbf{c} は c_j のベクトルであり , $\mathbf{H}, \mathbf{G}, \mathbf{D}, \mathbf{H}', \mathbf{G}', \mathbf{D}'$ はそれらの係数行列である .

n 個の境界選点のうちの \bar{n} 個の境界計算点 (BCP と略記) を取り , m 個の内部選点を内部計算点 (ICP と略記) として取る . 式(2.2)により , 計算点 i における b の値 b_i について , 次のように近似することができる .

$$b_i \approx \sum_{j=1}^{15} c_j r_j(x_i, y_i) \equiv \sum_{j=1}^{15} k_{ij} c_j \equiv \phi_i(c_j) \quad (2.5)$$

次に b は $u, \partial u / \partial x, \dots$ の関数として与えられているから , b_i を c_j の関数で表すために , u を座標の多項式によって近似する .

$$u \approx \sum_{j=1}^{15} c_j r_j(x, y) \quad (2.6)$$

ここで , r_j は式(2.2)と同様 , 4 次までの完全多項式の各項とする . 式(2.6)を微分すれば , u の導関数が求められる . 計算点 i において , u_i は次のようになる .

$$u_i \approx \sum_{j=1}^{15} c_j r_j(x_i, y_i) \equiv \sum_{j=1}^{15} k_{ij} c_j \quad (2.7)$$

一方 , 式(2.3) , (2.4) および境界条件により , 各境界・内部計算点 i における u の値 u_i は , c_j の関数で表すことができる . c_j を含む項と含まない項とに分けて表せば , 形式的に次の式が成り立つ .

$$u_i = u_i^0 + \sum_{j=1}^{15} d_{ij}^u c_j \quad (2.8)$$

したがって , 式(2.7)と(2.8)により

$$\sum_{j=1}^{15} k_{ij} c_j = u_i^0 + \sum_{j=1}^{15} d_{ij}^u c_j \quad (2.9)$$

各境界・内部計算点ごとに成り立つ式(2.9)をまとめれば , $m + \bar{n}$ 個の式が得られる (ただし , 特異性を回避するために , $m + \bar{n}$ は 15 以上にしなければならない) . これらの式について , 最小 2 乗法を用いれば , 次の式が成り立つ .

$$\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{c}' = \tilde{\mathbf{u}}^0 + \tilde{\mathbf{D}}^u \mathbf{c} \quad (2.10)$$

ここで , 上記ベクトルと行列の成分は次のようになる .

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{ij} &= \sum_{j=1}^{m+\bar{n}} k_{ij} k_{il}, \quad \tilde{u}_i^0 = \sum_{j=1}^{m+\bar{n}} u_i^0 k_{il} \\ \tilde{d}_{ij}^u &= \sum_{j=1}^{m+\bar{n}} d_{ij}^u k_{il} \end{aligned} \quad (2.11)$$

式(2.10)により , \mathbf{c}' を \mathbf{c} で表すことができる . したがって , u および u の導関数は c_j の関数として表せる . このようにして , 計算点 i における b_i は , 次のように c_j の関数として表された .

$$b_i = b(x_i, y_i, u_i, \partial u_i / \partial x, \dots) \equiv \varphi_i(c_j) \quad (2.12)$$

式(2.5) , (2.12) から , c_j について次の式が成り立つ .

$$\Psi_i(c_j) \equiv \phi_i(c_j) - \varphi_i(c_j) = 0 \quad (2.13)$$

各境界・内部計算点ごとに成り立つ式(2.12)をまとめれば , $m + \bar{n}$ 個の式が得られる . $\Psi_i(c_j)$ の 2 乗和を最小にすることにより , c_j を決める . それを式(2.3) , (2.4) に代入すれば , 境界・内部未知量の値を得る . 計算点解析法の 1 つの長所は , すべての境界・内部選点に関する大きい方程式系を用いずに , c_j を $m + \bar{n}$ 個の計算点だけで決定することにある .

3. FGM の熱伝導問題

FGM の定常熱伝導問題の支配方程式は次のように与えられる .

$$\nabla(\lambda \nabla u) = 0 \quad (3.1)$$

ここで , λ は熱伝導率であり , FGM では場所の関数となる . また u は温度である . 式(3.1)を変形すると次のようになる .

$$\nabla^2 u + \frac{1}{\lambda} (\nabla \lambda \nabla u) = 0 \quad (3.2)$$

したがって , 2 次元問題であれば ,

$$b = \frac{1}{\lambda(x, y)} [\nabla \lambda(x, y) \nabla u(x, y)] \quad (3.3)$$

を非同次項とする Poisson 方程式で表される . なお上式は未知数 u の導関数を含むものである .

4. 計算例

ここでは 2 つの計算例を取り上げ , 解析法を検討

する．なお以下ではすべて無次元量として扱うものとする．

<例題 1> λ が x 方向の関数の場合

Fig. 1 のような正方形領域 Ω の問題を考える．ここでは熱伝導率は x 方向に線形に変化するものとし， $\lambda = e_1 + d_1 x$ とおく． e_1 を 80 と固定し， d_1 を -20，-100 とし解析を行う．

$e_1 = 80$ ， $d_1 = -20$ のとき，式(3.2)の解析解はつぎのようになる．

$$u = \frac{200 \ln(-1/4x + 1)}{\ln(7/8)} \quad (4.1)$$

また， $e_1 = 80$ ， $d_1 = -100$ のとき，解析解はつぎのようになる．

$$u = \frac{200 \ln(-5/4x + 1)}{\ln(3/8)} \quad (4.2)$$

境界要素としては直線で表される線形要素を用い，各辺ごとに 10 個の要素によって離散化する(合計境界要素数 $n = 40$)．境界計算点(BCP)は等間隔に 20 点($\bar{n} = 20$)とし，内部計算点(ICP)は 5, 9 点($m = 5, 9$)とした．Fig. 2 に境界節点および内部計算点の配置を示す．

上記の計算条件で，得られた結果を Fig. 3, 4, 5 に示す．Fig. 3 の横軸は領域 Ω において $y = 0$ のときの x 座標である．また Fig. 4 の横軸は領域 Ω において $x = 0$ のときの y 座標，Fig. 5 の横軸は $x = 0.5$ のときの y 座標である．図に厳密解と比較されているように， m は大きな影響を与えずに，妥当な結果を得ることがわかる．

<例題 2> λ が半径方向の関数の場合

軸対称なリングの問題を扱うために，リングの一部，すなわち Fig. 6 のような領域 Ω の問題を考える．ここでは $\lambda = e_2 + d_2 r$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$) とおき， $e_2 = 125$ ， $d_2 = -250$ とし解析を行う．内外周の u を 300, 150 とすれば，式(3.2)の解析解はつぎのよう

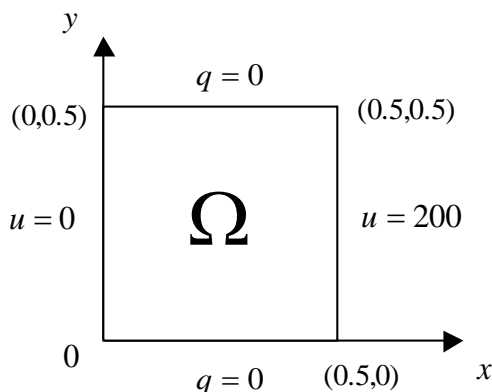


Fig. 1 Example 1

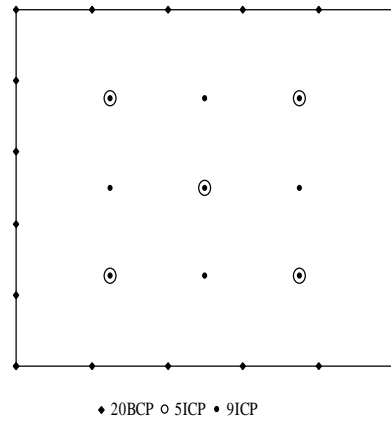


Fig. 2 Boundary computing points and internal computing points

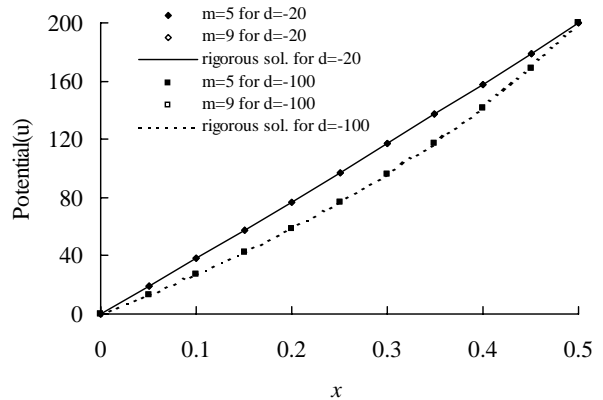


Fig. 3 Result of u

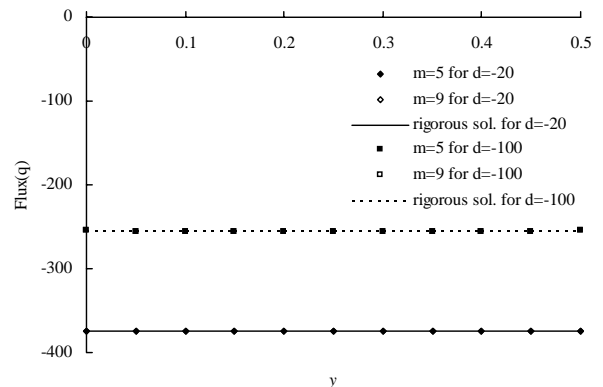


Fig. 4 Result of q at $x = 0$

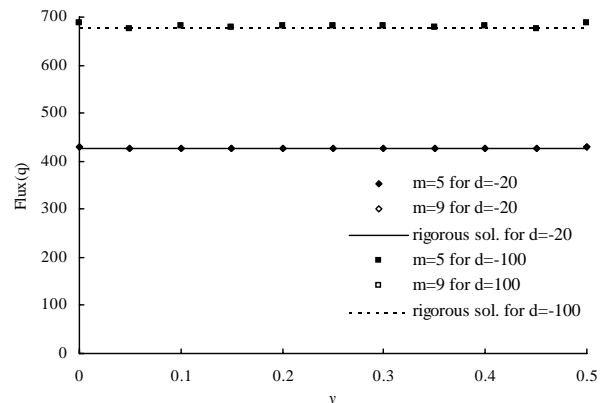


Fig. 5 Results of q at $x = 0.5$

になる。

$$u = 300 - \frac{150 \ln(3r/(1-2r))}{\ln 2.25} \quad (4.3)$$

境界要素としては直線で表される線形要素を用い、各辺ごとに 4, 10, 20 個の要素によって離散化する (合計境界要素数 $n=16, 40, 80$)。境界計算点 (BCP) はそれぞれ等間隔に 8, 20, 40 点 ($\bar{n}=8, 20, 40$) とし、内部計算点 (ICP) は 9 点 ($m=9$) とした。Fig. 7 に境界節点および内部計算点の配置を示す。

上記の計算条件で、得られた結果を Fig. 8 に示す。なお、境界要素数と境界計算点をそれぞれ 3 種類とっているが、図上ではこれらによる結果の違いは区別できない。Fig. 8 の横軸は領域 Ω において $y=0$ のときの x 座標である。図に厳密解と比較されているように、この場合においても例題 1 と同様、妥当な結果を得ることができる。

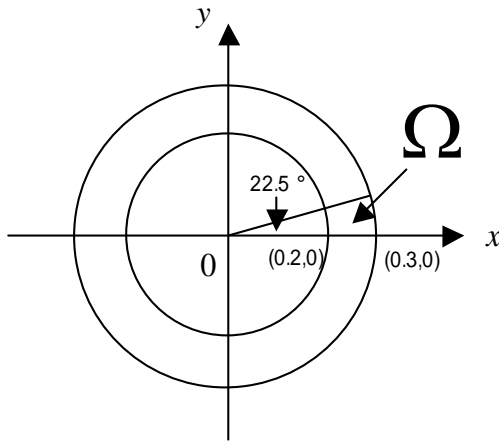


Fig. 6 Example 2

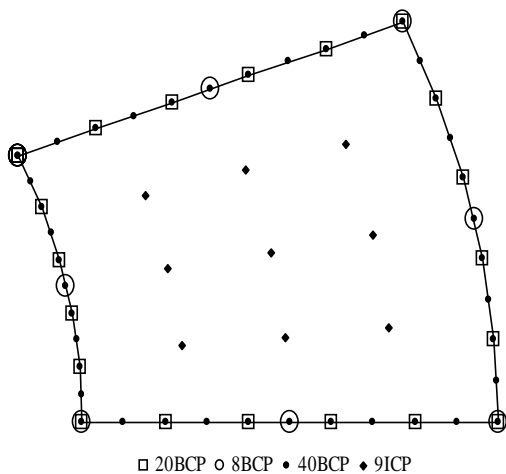


Fig. 7 Boundary computing points and internal computing points

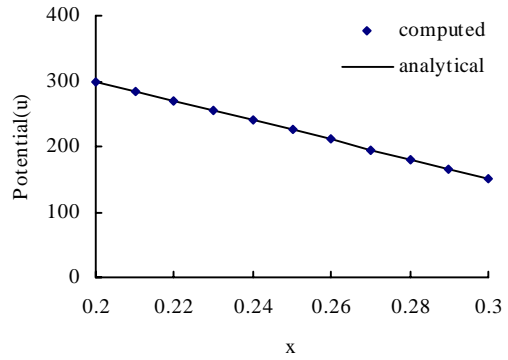


Fig. 8 Result of u

5. まとめ

本研究では、計算点解析法を傾斜機能材料の熱伝導問題に適用し、未知数の導関数を非同次項を含む問題において、方法が有効であることを確認した。ここで扱う問題は熱伝導率が線形に変化する場合であるが、より複雑に変化する場合への応用も原理的には同様に可能である。

6. 文献

- (1) P. W. Partridge, C. A. Brebbia, and L.C. Wrobel, *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, Comp. Mech. Pub., 1992
- (2) A. J. Nowak and A.C. Neves, eds., *The Multiple Reciprocity Boundary Element Method*, Comp. Mech. Pub., 1994
- (3) 神谷・許, 非同次・非線形問題に対する境界要素解析の一定式と解法, 日本機械学会論文集 (A), 64(1998), pp. 147-154
- (4) 許・神谷, 非同次・非線形問題に対する境界要素の一定式と解法 (続報: 未知関数の導関数を含む非同次項の場合), 日本機械学会論文集 (A), 64(1998), pp. 1341-1347
- (5) 許・神谷, 計算点解析法による境界要素法のためのアダプティブ境界要素, 日本機械学会論文集 (A), 64(1998), pp. 1598-1595
- (6) 神谷・許・鈴木, 境界要素法における計算点解析法の多重領域問題への応用, BEM テクノロジーコンファレンス論文集, 10(2000), pp. 23-28
- (7) 田中・松本・須田, 非均質媒体中の定常熱伝導問題に対する二重相反境界要素法, BEM テクノロジーコンファレンス論文集, 10(2000), pp. 33-36
- (8) 田中・松本・須田, 傾斜機能材料の定常熱伝導問題に対する DRM 境界要素法, 境界要素法論文集, 17(2000), pp. 11-16