

# 非定常熱伝導問題に対する時間ステップ境界要素解析への 二重相反法の適用

## APPLICATION OF DUAL RECIPROCITY METHOD TO TIME-STEPPING BEM APPLIED TO THE TRANSIENT HEAT CONDUCTION PROBLEM

田中 正隆<sup>1)</sup>, 松本 敏郎<sup>2)</sup>, 須田 裕輔<sup>3)</sup>, 高桑 晋<sup>4)</sup>

Masataka TANAKA, Toshiro MATSUMOTO, Yusuke SUDA and Susumu TAKAKUWA

- |                      |             |                  |  |
|----------------------|-------------|------------------|--|
| 1) 信州大学工学部機械システム工学科  | (〒 380-8553 | 長野市若里 4-17-1,    | E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)     |
| 2) 信州大学工学部機械システム工学科  | (〒 380-8553 | 長野市若里 4-17-1,    | E-mail: toshiro@gipwc.shinshu-u.ac.jp)     |
| 3) 富士通長野システムエンジニアリング | (〒 380-0813 | 長野市鶴賀鍋谷田 1403-3, | E-mail: dyusuke@d1.dion.ne.jp)             |
| 4) 信州大学大学院工学系研究科     | (〒 380-8553 | 長野市若里 4-17-1,    | E-mail: s-takakuwa@artist.shinshu-u.ac.jp) |

This paper presents application of dual reciprocity method (DRM) to time-stepping BEM applied to the transient heat conduction problem. In the present BEM formulation, the simple fundamental solution for Laplace equation is employed, and time derivative is approximated by the time-stepping method. Hence the domain integral concerning the “pseudo” initial condition at each time step is included in the boundary integral equation. This domain integral is transformed into boundary integrals by using a new set of radial basis functions for DRM. The details of the proposed DRBEM are presented, and a computer code is developed for two-dimensional problems. The usefulness of the present method is demonstrated through numerical examples.

**Key Words:** Computational Mechanics, Time-stepping Boundary Element Method, Dual Reciprocity Method, Transient Heat Conduction

### 1. はじめに

非定常熱伝導問題に対する境界要素法の定式化では、導出される境界積分方程式の中に初期条件に由来する領域積分項が残る。この領域積分を評価するためには、領域内部を要素またはセルに分割しなければならないが、領域内部の要素分割にはたいへん手間がかかり境界要素法の特長が半減してしまう<sup>(1)</sup>。また、定式化の際に必要な基本解に時間依存の厳密基本解を用いると、係数マトリックスの計算がかなり複雑となる<sup>(1)</sup>。

本研究では、近似基本解として Laplace 方程式の基本解を用いて定式化を行う。また、ここでは時間微分を時間ステップ近似<sup>(2)(3)</sup>して積分方程式の定式化を行い、各時間ステップごとに順次解いてゆく。この定式化において時間ステップごとに現れる見かけの初期条件に由来する領域積分項に対して二重相反法 (DRM)<sup>(4)(5)</sup>を適用し、境界積分に置き換え近似的に評価する。DRM を適用することによって、境界積分方程式の中に現れる領域積分項を比較的簡単な近似関数と線形微分作用素の特解を用いて境界積分に変換することができる。したがって評価点を領域内部に配置するだけで、最終的

に境界のみの離散化で効率的な解析が可能となる。

本報では、DRM を用いた定式化の詳細と開発した解析プログラムによる解析例を示し、本手法の有効性について検討を行う。

### 2. 理論

#### 2.1. 支配微分方程式

2次元非定常熱伝導問題に対する支配微分方程式は、内部発熱がない場合次式で与えられる。

$$\nabla^2 u(x, t) = \frac{1}{k} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (1)$$

ただし、 $u(x, t)$  は温度、 $k$  は熱拡散率、 $\nabla$  は微分演算子を表すものとする。また、上式において境界条件および初期条件は次式で与えられるものとする。

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \bar{u}, & \in \Gamma_u \\ q(x, t) &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} = \bar{q}, & \in \Gamma_q \\ u(x, 0) &= u_0, \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 $n$  は境界  $\Gamma$  上の単位外向き法線ベクトルであり、 $\partial u(x, t)/\partial n$  は  $u(x, t)$  の法線方向勾配を表すものとする。ま

た,  $\Gamma_u, \Gamma_q$  はそれぞれ温度, 熱流束が既知の境界であり,  $\bar{u}, \bar{q}, u_0$  は既知の境界値および初期値である.

## 2.2. 境界積分方程式の導出

本研究では, 支配微分方程式の時間微分に対して時間ステップ近似を適用する. このとき, 初回の計算においては後退差分近似, 2 回目以降の計算においては二次曲線差分近似を適用するものとする. このとき, 初回の計算における近似式は次式となる.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{u(x, t) - u_0(x, t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (3)$$

ただし,  $\Delta t$  はタイムステップ幅,  $u_0(x, t - \Delta t)$  は 1 ステップ前の初期温度を表すものとする. また, 2 回目以降の計算における近似式は次式となる.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{3u(x, t) - 4u_0(x, t - \Delta t) + u_0(x, t - 2\Delta t)}{2\Delta t} \quad (4)$$

ただし,  $u_0(x, t - \Delta t)$  は 1 ステップ前の温度,  $u_0(x, t - 2\Delta t)$  は 2 ステップ前の温度を表すものとする. この 2 つの近似式を次式のように 1 つにまとめて表す.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = au(x, t) - a_0u_0(x, t - \Delta t) \quad (5)$$

ここで,  $u_0(x, t - \Delta t)$  は 1 ステップ前, 2 ステップ前を含めた過去の温度である. また,  $a, a_0$  はそれぞれ現在求めている温度, 過去の温度の差分近似式に関する係数である. 1 ステップまたは 2 ステップ前の各節点における温度を見かけの初期条件として計算を進める. これより式 (1) は次式のように書き表すことができる.

$$\nabla^2 u(x, t) = \frac{1}{k} \{ au(x, t) - a_0u_0(x, t - \Delta t) \} \quad (6)$$

境界積分方程式の導出において本研究では近似基本解として Laplace 方程式の基本解を使用する. Laplace 方程式の基本解は次式で与えられる.

$$u^*(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (7)$$

ただし,  $r$  はソース点  $y$  と観測点  $x$  との距離を表す. 式 (6) の両辺に上式の基本解  $u^*(x, y)$  をかけ考察領域全体で積分し部分積分すると次式を得る.

$$\begin{aligned} c(y)u(y, t) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)u(x, t)d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*(x, y)q(x, t)d\Gamma \\ = \int_{\Omega} \frac{u^*(x, y)}{k} \{ au(x, t) - a_0u_0(x, t - \Delta t) \} d\Omega \end{aligned} \quad (8)$$

ただし,  $c(y)$  はソース点の置かれている境界のなす角度により決まる定数であり,  $q^*(x, y)$  は基本解  $u^*(x, y)$  の法線方向勾配を表し, 次式で与えられる.

$$q^*(x, y) = \frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (9)$$

式 (8) において, 左辺についてはすべて境界積分に変換することができるが, 右辺の領域積分項はそのまま残る. この領域積分項を評価する際, 領域内部を要素またはセルに区切るにより領域積分を評価する手法が提案されているが, こ

の作業にはたいへん手間がかかり, 境界要素法の特長が半減してしまう<sup>(1)</sup>. そこで, この領域積分項を境界積分に変換するために DRM を適用する.

## 2.3. DRM の適用

まず, 支配微分方程式に時間ステップ近似を適用した式 (6) の右辺を次式で近似する.

$$\frac{1}{k} \{ au(x, t) - a_0u_0(x, t - \Delta t) \} = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^{\ell} f(x, z^{\ell}) \quad (10)$$

ただし,  $N$  は境界節点数,  $L$  は内部選点数,  $\alpha^{\ell}$  は未知係数,  $f(x, z^{\ell})$  は近似関数,  $z^{\ell}$  は DRM 選点を表すものとする. ここで, 次式を満たす特解を  $\hat{u}(x, z^{\ell})$  とする.

$$\nabla^2 \hat{u}(x, z^{\ell}) = f(x, z^{\ell}) \quad (11)$$

この特解  $\hat{u}(x, z^{\ell})$  を用いると式 (6) の時間ステップ近似を適用した支配微分方程式は未知係数  $\alpha^{\ell}$  と特解  $\hat{u}(x, z^{\ell})$  により次式のように書き表すことができる.

$$\nabla^2 u(x, t) = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^{\ell} \nabla^2 \hat{u}(x, z^{\ell}) \quad (12)$$

上式の両辺に基本解  $u^*(x, y)$  をかけ, 考察領域全体で積分すると次式となる.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{ \nabla^2 u(x) \} u^*(x, y) d\Omega \\ = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left\{ \int_{\Omega} \nabla^2 \hat{u}_j(x, z^j) u^*(x, y) d\Omega \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

上式を部分積分することにより次の境界積分方程式を得る.

$$\begin{aligned} c(y)u(y, t) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)u(x, t)d\Gamma \\ - \int_{\Gamma} u^*(x, y)q(x, t)d\Gamma = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^{\ell} \left\{ c(y)\hat{u}(y, t) \right. \\ \left. + \int_{\Gamma} q^*(x, y)\hat{u}(x, z^{\ell})d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*(x, y)\hat{q}(x, z^{\ell})d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

ただし,  $\hat{q}(x, z^{\ell})$  は特解  $\hat{u}(x, z^{\ell})$  の法線方向勾配を表し次式となる.

$$\hat{q}(x, z^{\ell}) = \frac{\partial \hat{u}(x, z^{\ell})}{\partial n} \quad (15)$$

式 (14) から, DRM を適用することによりすべて境界積分に変換された境界積分方程式が得られていることが分かる.

ここで, 本研究では近似関数として観測点  $x$  と DRM 選点  $z^{\ell}$  との距離  $r^{\ell}$  の関数を使用する. 基本解で用いる  $r$  はソース点  $y$  と観測点  $x$  との距離であるから,  $r^{\ell}$  と  $r$  の違いには注意が必要である.

DRM で用いられる近似関数に対してはさまざまな関数が使われており多くの研究がなされており, 距離の関数を使用することが一般的である. 本研究では近似関数として次式を使用する.

$$f(x, z^{\ell}) = (1 - r^{\ell})^3 (3r^{\ell} + 1) \quad (16)$$

上式は、Compactly Supported Radial Basis Function と呼ばれる近似関数である<sup>(5)</sup>。他の研究では上式の近似関数が影響を与える半径を限定するという提案もされているが、本研究では半径を限定することによる考察は行わない。式(11)を用いることにより特解  $\hat{u}(x, z^\ell)$  も距離  $r^\ell$  の関数となり、具体形は次式となる。

$$\hat{u}(x, z^\ell) = \frac{1}{4}(r^\ell)^2 - \frac{3}{8}(r^\ell)^4 + \frac{8}{25}(r^\ell)^5 - \frac{1}{12}(r^\ell)^6 \quad (17)$$

同様に特解の法線方向勾配  $\hat{q}(x, z^\ell)$  も  $r^\ell$  の関数となる。

$$\hat{q}(x, z^\ell) = \left( r_1 \frac{\partial x_1}{\partial n} + r_2 \frac{\partial x_2}{\partial n} \right) \times \left\{ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}(r^\ell)^2 + \frac{8}{5}(r^\ell)^3 - \frac{1}{2}(r^\ell)^4 \right\} \quad (18)$$

ただし、 $r_1, r_2$  は  $r^\ell$  の  $x_1$  および  $x_2$  方向成分を表すものとする。2点  $x, z^\ell$  を決定することにより近似関数とその特解および特解の法線方向勾配を求めることができる。さらに、式(14)の境界積分方程式をすべての選点に対して適用することにより  $N + L$  個の式が得られ、マトリックス形式で次式のようにまとめることができる。

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = [\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}}]\boldsymbol{\alpha} \quad (19)$$

しかし、上式は未知係数  $\boldsymbol{\alpha}$  を含んだままであり、これを決定する必要がある。本研究では、DRM を適用する際に時間微分に関する項を式(10)で近似していた。これを再記する。

$$\sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^\ell f(x, z^\ell) = \frac{1}{k} \{ au(x, t) - a_0 u_0(x, t - \Delta t) \} \quad (20)$$

ここで、近似関数  $f(x, z^\ell)$  は2点  $x$  と  $z^\ell$  を決定することにより既知関数となる。この関係式が全ての選点に対して成り立つと仮定すると未知係数  $\alpha^\ell$  を求めることができ、マトリックス形式で書き表すと次式となる。

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^{-1} \left[ \frac{a}{k} \mathbf{u} - \frac{a_0}{k} \mathbf{u}_0 \right] \quad (21)$$

ただし、 $\mathbf{F}^{-1}$  は  $\mathbf{F}$  の逆行列を表し、

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(x^1, z^1) & \dots & f(x^1, z^{N+L}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x^{N+L}, z^1) & \dots & f(x^{N+L}, z^{N+L}) \end{bmatrix} \quad (22)$$

である。この未知係数  $\alpha^\ell$  を離散化された式(19)へ代入し整理すると次に示す線形の式を得る。

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \mathbf{R}\mathbf{u} - \mathbf{U}_0 \quad (23)$$

ただし、

$$\mathbf{R} = \frac{a}{k} [\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}}] \mathbf{F}^{-1} \quad (24)$$

$$\mathbf{U}_0 = \frac{a_0}{k} [\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}}] \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u}_0 \quad (25)$$

とする。式(22)を境界条件より未知量と既知量に振り分け連立方程式を解くことにより各タイムステップにおける境界上の未知量と領域内部の未知温度を求めることができる。

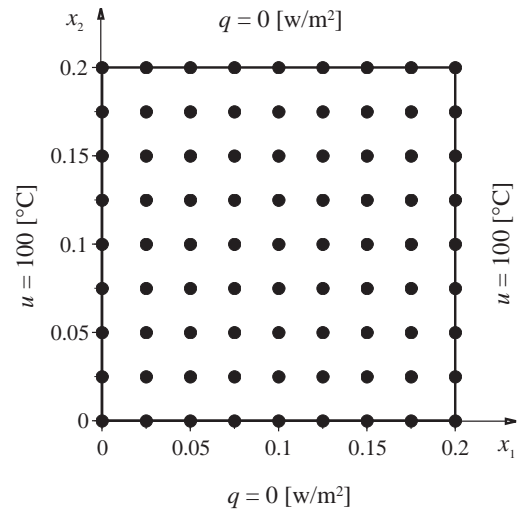


Fig. 1 Analysis model and discretization

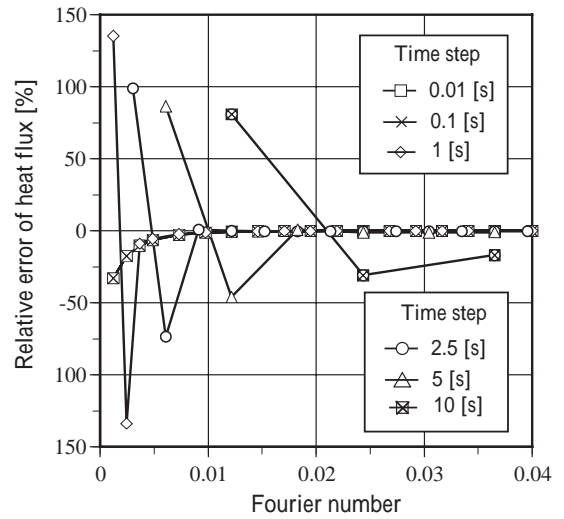


Fig. 2 Relative error of heat flux

### 3. 数値解析例

本手法の有効性を示すために以下の数値解析を行い、得られた結果について考察を行う。

Fig.1 に示す正方形モデルを用いて数値解析を行う。境界節点を32点、境界を2次要素を用いて16要素に分割する。内部選点は49点、図示のように配置する。境界条件は、 $x_1 = 0, 0.2$  において温度  $u = 100$  [°C]、 $x_2 = 0, 0.2$  においては断熱境界条件  $q = 0$  [W/m<sup>2</sup>] を与えるものとする。また、初期温度は領域全体に様に  $0$  [°C] として与える。材料定数を、熱伝導率  $\lambda$ : 120 [W/mK]、密度  $\rho$ : 2800 [kg/m<sup>3</sup>]、比熱  $c$ : 880 [J/kgK] とする。

本手法では時間微分を時間ステップ近似しているため、精度のよい解を求めるには時間分割に留意する必要がある。適切なタイムステップ幅を決定しなければならない。特に境界の温度が急激に変化する場合は、その直後の境界付近における熱流束の計算精度が安定しにくいことが考えられる。Fig.2 に、熱流束の解析解の厳密解との相対誤差をタイムステップ

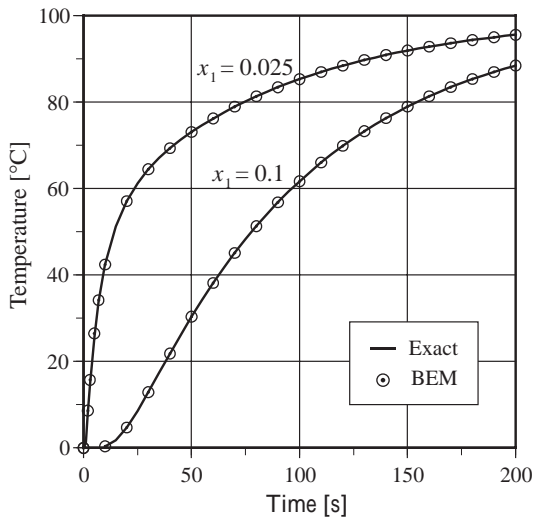


Fig.3 Temperature variation

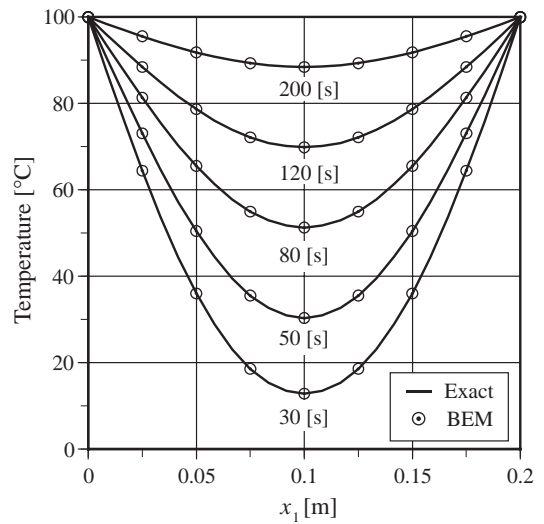


Fig.5 Results of Temperature along axis  $x_1$

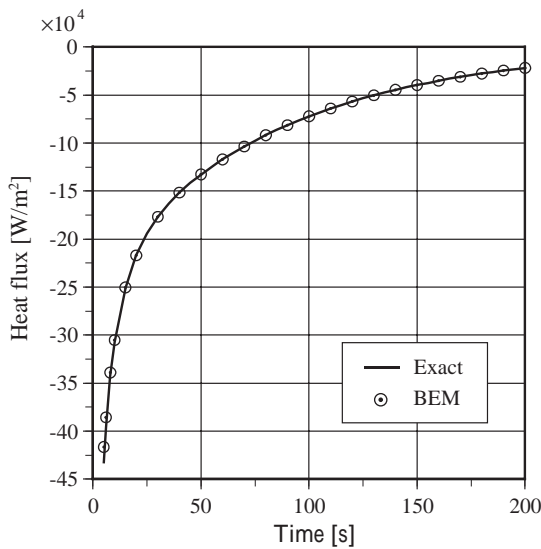


Fig.4 Heat flux variation along axis  $x_2$

Fig.5 に  $x_1$  軸上の各時刻における温度の解析結果を厳密解と比較して示す．精度のよい結果が得られていることがわかる．内点においてもよい結果が得られていることを確認している．

#### 4. 結言

非定常熱伝導問題に対する時間ステップ境界要素解析への二重相反法の適用について検討した．開発した解析プログラムにより数値解析を行い，本手法により精度のよい解が求められることを確認できた．2次元問題での数値解析例から，タイムステップ幅に計算精度が影響され，タイムステップ幅を小さくすることにより精度が安定する時間が早くなることわかる．精度のよい解を求めるためには，適切なタイムステップ幅を用いる必要があると思われる．

#### 参考文献

- (1) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行: 境界要素法, 培風館, (1991).
- (2) 田中正隆, 松本敏郎, 楊慶峰: 時間ステップ近似スキームに基づく2次元非定常熱伝導方程式の境界要素法解析, シミュレーション, **11-4** (1992), pp.294-301.
- (3) 田中正隆, 松本敏郎, 楊慶峰: 直交異方性体の非定常熱伝導問題に対する時間ステップ境界要素法, 日本機械学会論文集 (A 編), **59-559** (1993), pp.856-862.
- (4) P. W. Partridge, C. A. Brebbia, and L. C. Wrobel: The Dual Reciprocity Boundary Element Method, *Computational Mechanics Publications*, (1992).
- (5) C. S. Chen, C. A. Brebbia, and H. Power: Dual Reciprocity Method Using Compactly Supported Radial Basis Functions, *Commun. Numer. Meth. Engng.* **15** (1999), pp. 225-242.

別に示す．ここで横軸はフーリエ数と呼ばれる無次元時間であり，次式で表される．

$$F_o = k \frac{t}{L^2} \quad (26)$$

ここで， $k$  は熱拡散率， $t$  は時間， $L$  は解析対象の長さである．Fig.2 から，タイムステップ幅が小さいほうが早い時間で計算精度が安定することが分かる．また，タイムステップ幅を 0.1[s] より小さくしてもこれ以上計算精度が上がらないことを確認している．そこでタイムステップ幅を 0.1[s] として解析を行う．また，熱拡散率  $k$  を小さくするとタイムステップ幅を大きくとれることを確認している．

Fig.3 に  $x_1 = 0.025, 0.1$  における温度の変化を厳密解と比較して示す．精度のよい結果が得られていることがわかる．また，Fig.4 に  $x_2$  軸上の熱流束を厳密解と比較して示す．6秒前後まではわずかに精度が悪くなっているが，それ以後は精度のよい結果が得られていると言える．