

多倍長計算を用いた逆向き熱方程式の差分解法

NUMERICAL SOLUTION OF THE BACKWARD HEAT CONDUCTION EQUATION USING
ARBITRARY PRECISION ARITHMETIC飯島健太郎¹⁾

Kentarō Iijima

1) 茨城大学大学院理工学研究科 (〒 310-8512 茨城県水戸市文京 2-1-1, E-mail: nd2401a@mcs.ipc.ibaraki.ac.jp)

We consider a numerical method to find a temperature $u(\mathbf{x}, t)$ of the heat conduction equation $\partial u / \partial t = \Delta u$ in a bounded two-dimensional domain $D \subset \mathbf{R}^2$ and for $\bar{T} \leq t < 0$ at the past time $\bar{T} < 0$ from given temperature $u(\mathbf{x}, 0)$ with prescribed temperature on the boundary $u(\mathbf{x}, t)$ for $\mathbf{x} \in \Gamma = \partial D$ and $t \in [\bar{T}, 0]$. This is a typical severely ill-posed problem. We apply the finite difference method for the approximation of the backward heat conduction equation and we use arbitrary precision arithmetic in numerical computations in order to solve this backward heat conduction problem numerically. By the term *arbitrary precision arithmetic*, we mean a computer arithmetic system in which numbers of figures as large as required are taken for numerical computation in order to keep the significant digits in the arithmetic. By using a few numerical experiments on simple examples, we observed the relationship between the number of figures and the error of numerical solutions. We examined the dependence of the rate of growth of errors on the number of figures used in the arithmetic. We conclude that the problem is solved over a longer time interval when the number of figures is increased in the arbitrary precision arithmetic.

Key Words: Inverse problem, Round-off error, Stability condition

1. 導入

領域 D は区分的に滑らかな境界 $\Gamma = \partial D$ をもつとし, $\bar{T} < 0$ を負の時定数とする. $u \in C(\bar{D} \times [\bar{T}, 0])$ を任意の $t \in [\bar{T}, 0)$ に対して $u(\cdot, t) \in C^2(D)$, かつ任意の $\mathbf{x} \in D$ に対して $u(\mathbf{x}, \cdot) \in C^1[\bar{T}, 0)$ を満たす関数とする. $f \in C(\Gamma \times [\bar{T}, 0])$ と $w \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$ が与えられたとき,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad \text{in } D \times [\bar{T}, 0) \quad (1)$$

$$u(\cdot, 0) = w \quad \text{in } D \quad (2)$$

$$u = f \quad \text{on } \Gamma \times [\bar{T}, 0] \quad (3)$$

を満たす u を求める問題を考える. ただし f, w は適合条件 $f(\cdot, 0) = w$ on Γ を満たすとする. この問題を逆向き熱伝導問題という.

逆向き熱伝導問題は不安定であることが示される. つまり, 与えられた w が少しでも変化すると解 u が全く異なってしまう. 差分法により逆向き熱伝導問題を数値的に解く場

合, 差分スキームは不安定となる. そのためデータに混入するわずかな誤差に対しても数値解は大きく影響を受けてしまう. これまでに不安定な問題を解くための手法として, 正則化法が研究されてきた⁽³⁾. 近年, 多倍長計算とスペクトル選点法を用いた無限精度数値計算手法によって, 不安定な問題を解析する研究が登場した. 研究⁽¹⁾では Laplace 方程式の Cauchy 問題と逆向き熱伝導問題, 研究⁽²⁾では第一種積分方程式を高い精度で解くことに成功している. 多倍長計算とは演算桁数を必要なだけとることができる数値計算法である. 多倍長計算を用いることは, 丸め誤差を小さくするために有効であると考えられる.

本研究では, 多倍長計算を用いて逆向き熱伝導問題の数値解を得ることを考える. さらに, 多倍長計算で用いる演算桁数と数値解の誤差との間の関係を導く.

2. 問題の非適切性

ある偏微分方程式の初期値・境界値問題が、解の存在性、一意性、安定性をもつ問題であるとき、この初期値・境界値問題は Hadamard の意味で適切な問題であるという。解の存在性、一意性、安定性のうち 1 つでも成り立たない問題を Hadamard の意味で非適切な問題という。文献 (4) では逆向き熱伝導問題の非適切性について述べた文献 (5) が紹介されている。

定理 2.1 (解の非存在性 (4))

逆向き熱伝導問題には解が存在するとは限らない。

例. 原点 $(0, 0)$ を内部に含む有界領域 D を考える。関数

$$\tilde{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi(t+1)} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4(t+1)}\right)$$

は $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$, $t > -1$ において熱方程式を満たす。 $w = \tilde{u}(\cdot, 0)$, in D , $f = \tilde{u}$ on $\Gamma \times (-1, 0)$, $f(\cdot, -1) = 0$ on Γ と置く。この w , f に対する問題 (1)–(3) の解 $u(\cdot, -1)$ は存在しないことが示される。なぜなら、 $t \rightarrow -1$ のとき $u(\mathbf{0}, t) \rightarrow \infty$ かつ $u(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ となるからである。

以下、この 2 節において、ノルム

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\| &= \left(\int_D |u(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}, \\ \|w\| &= \left(\int_D |w(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

を用いる。解の不安定性について述べた次の定理が示されている。

定理 2.2 (解の不安定性 (4))

境界データ $f = 0$ を与えたとき、逆向き熱伝導問題 (1)–(3) の解 u が存在すると仮定する。このとき、初期データ $w \in L^2(D)$ に対して

$$\|u(\cdot, t)\| \geq \|w\| \exp\left(\frac{\int_D |\nabla w(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}}{\int_D |w(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}}(-t)\right),$$

$$t \in [\bar{T}, 0]$$

が成り立つ。

定理 2.2 から次の 2 つのことがいえる。

1. 逆向き熱伝導問題 (1)–(3) の解 u は w に対して不安定である。例として、 $D := (0, 1) \times (0, 1)$ とし、

$$w_n(x, y) := \frac{1}{n} \sin(n\pi x) \sin(n\pi y), \quad n \in \mathbf{N}$$

と置く。初期データとして w_n を与えた (1)–(3) の解を u_n と置けば、定理 2.2 から

$$\|u(\cdot, t)\| > e^{2(n\pi)^2(-t)} \|w\| \quad (4)$$

が成り立つ。評価式 (4) から、任意の $C > 0$ に対して $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在して

$$\begin{aligned} \|u_{n_0}(\cdot, t)\| &> e^{2(n_0\pi)^2(-t)} \|w_{n_0}\| \\ &> C \|w_{n_0}\|, \quad t \in [\bar{T}, 0] \end{aligned}$$

が成り立つので、 u_n は w_n に連続的に依存していないことがわかる。

2. $u(\cdot, t)$ は $-t$ に関して指数関数的に増加する。

3. 差分法による離散化

この節では逆向き熱伝導問題を数値的に解くために、差分法を用いて離散化する。この節以降、差分法における格子点をとりやすくするため、領域を $D := (0, 1) \times (0, 1)$ に固定して問題を扱う。逆向き熱伝導問題を時間方向へ後退差分により離散化すると陽的な差分スキームが得られる。陽的な差分スキームを用いた数値計算では、連立一次方程式を解く必要がなく、計算量を減らすことができる。これにより多くの計算量を必要とする多倍長計算の負担を軽くできる。この第 3 節の内容は (7) を参照した。

3.1. 後退差分を用いた離散化

正方形領域 $D = (0, 1) \times (0, 1)$ を x, y 方向の両方に n 等分割することにより格子点 (x_i, y_j) を定める。すなわち、分割幅を $h = 1/n$ とし、 D の格子点を $(x_0, y_0) := (0, 0)$, $x_{i+1} := x_i + h$, $y_{j+1} := y_j + h$ (ただし、 $i, j = 0, 1, \dots, n-1$) によって与える。また、時間刻み幅を $\Delta t > 0$ とし、時間方向の分点を $t_0 := 0$, $t_{k+1} := t_k - \Delta t$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) として与える。問題 (1)–(3) の真の解 u の (x_i, y_j, t_k) における近似値を u_{ij}^k と置き、離散化には時間方向に後退差分、 x, y の両方向に 5 点中心差分を用いた差分スキーム

$$\frac{u_{ij}^k - u_{ij}^{k+1}}{\Delta t} = \frac{u_{i+1j}^k - 2u_{ij}^k + u_{i-1j}^k}{h^2} + \frac{u_{ij+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{ij-1}^k}{h^2}, \quad (5)$$

ただし $i, j = 1, 2, \dots, n-1$, $k = 0, 1, 2, \dots$

を用いる。式 (5) を u_{ij}^{k+1} について解いて、陽的なスキーム

$$\begin{aligned} u_{ij}^{k+1} &= -\rho u_{i-1j}^k - \rho u_{i+1j}^k + (1+4\rho)u_{ij}^k \\ &\quad - \rho u_{ij+1}^k - \rho u_{ij-1}^k, \end{aligned} \quad (6)$$

ただし $i, j = 1, 2, \dots, n-1$; $k = 0, 1, 2, \dots$

が得られる。ここに $\rho = \frac{\Delta t}{h^2}$ である。

3.2. 差分スキームの適合性

差分スキームは、時間刻み幅 Δt , 空間刻み幅 h をともに 0 に近づけたとき、近似すべき元の方程式に近づくものでなければならない。この要請は差分スキームの適合性として次のように与えられる。

定義 3.1 (差分スキームの適合性)

偏微分方程式が x, y に関する線形微分演算子 L により

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu \quad (7)$$

と表され, 差分スキーム

$$u^{k+1}(x, y) = S(h, \Delta t)u^k(x, y) \quad (8)$$

が与えられているとする. 差分間隔 $h, \Delta t$ を 0 に近づけるときの, 両者の間に $h = h(\Delta t)$ という関数関係を与えたとする. ただし, $\Delta t \rightarrow 0$ のとき $h(\Delta t) \rightarrow 0$ を満たすとする. このとき, 微分方程式 (7) の解 $u(x, y, t)$ に対して

$$u(x, y, t + \Delta t) - S(h(\Delta t), \Delta t)u(x, y, t) = o(\Delta t)$$

という関係が成り立つならば, 差分間隔の間に $h = h(\Delta t)$ という関係を与えた差分スキーム

$$u^{k+1}(x, y) = S(h(\Delta t), \Delta t)u^k(x, y)$$

は微分方程式 (7) に適合しているという.

u を熱方程式の解とし, $\rho = \frac{\Delta t}{h^2}$ を一定とする. また, 各 $t \in [\bar{T}, 0)$ に対して

$$\begin{aligned} & S(h, \Delta t)u(x, y, t) \\ &= -\rho u(x, y - h, t) - \rho u(x - h, y, t) \\ & \quad + (1 + 4\rho)u(x, y, t) - \rho u(x + h, y, t) \\ & \quad - \rho u(x, y + h, t) \end{aligned} \quad (9)$$

と置く. ここで

$$\begin{aligned} & \frac{u(x, y, t) - u(x, y, t - \Delta t)}{\Delta t} \\ &= \frac{u(x - h, y, t) - 2u(x, y, t) + u(x + h, y, t)}{h^2} \\ & \quad - \frac{u(x, y - h, t) - 2u(x, y, t) + u(x, y + h, t)}{h^2} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) + o(1) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + o(1) \\ & \quad - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) + o(1) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u(x, y, t) + o(1) \\ &= o(1), \quad \Delta t \rightarrow 0, \quad t \in [\bar{T}, 0] \end{aligned}$$

であり, $u(x, y, t - \Delta t)$ について上式を整理し, (9) を用いれば

$$u(x, y, t - \Delta t) = S(h, \Delta t)u(x, y, t) + o(\Delta t)$$

である. よって差分スキーム

$$u^{k+1} = S(h, \Delta t)u^k \quad (10)$$

は熱方程式 (1) に適合する. $u^k(ih, jh)$ を u_{ij}^k によって置き換えれば, 差分スキーム (6) は熱方程式 (1) に適合することが示される.

3.3. 差分スキームの不安定性

差分スキームが元の微分方程式に適合していても, $\Delta t \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ としたとき, 差分スキームの解が発散せず, 安定であることが必要である.

定義 3.2 (差分スキームの安定性)

差分スキーム (8) が安定であるとは, ある定数 $C > 0$ が存在して, $\bar{T} \leq -k\Delta t \leq 0$ を満たす任意の $k, \Delta t$ に対して $\|S^k\| \leq C$ が成り立つことである. ただし, 作用素ノルム $\|\cdot\|$ は有界作用素 $A: C(\bar{D}) \rightarrow C(\bar{D})$ に対して maximum ノルム $\|\cdot\|_\infty$ により

$$\|A\| := \sup_{\varphi \in C(\bar{D}) \setminus \{0\}} \frac{\|A\varphi\|_\infty}{\|\varphi\|_\infty}$$

として定義される. 安定でない差分スキームを不安定であるという.

(a) 後退差分を用いた場合

差分スキーム (6) が maximum ノルムの意味で不安定であることを示す. $i^2 = -1$ とする. 任意の $\xi, \eta \in \mathbf{R}$ に対して $g \in \mathbf{C}$ が存在して

$$\tilde{u}(ph, qh, k\Delta t) = g^k e^{i\xi ph} e^{i\eta qh}, \quad p, q, k \in \mathbf{N} \quad (11)$$

は任意の p, q, k に関して差分スキーム (6) を満たすことが示される. この g は増幅率とよばれ, 差分スキーム (6) において k が 1 増加するごとに \tilde{u} が g 倍になることを表す. 実際, \tilde{u} を (6) へ代入すると,

$$\begin{aligned} & g^{k+1} e^{i\xi ph} e^{i\eta qh} \\ &= -\rho g^k e^{i\xi ph} e^{i\eta(q-1)h} - \rho g^k e^{i\xi(p-1)h} e^{i\eta qh} \\ & \quad + (1 + 4\rho)g^k e^{i\xi ph} e^{i\eta qh} \\ & \quad - \rho g^k e^{i\xi(p+1)h} e^{i\eta qh} - \rho g^k e^{i\xi ph} e^{i\eta(q+1)h} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} g &= -\rho e^{-i\eta h} - \rho e^{-i\xi h} + 1 + 4\rho \\ & \quad - \rho e^{i\xi h} - \rho e^{i\eta h} \\ &= -2\rho \cos(\xi h) - 2\rho \cos(\eta h) + 1 + 4\rho \\ &= 1 + 4\rho \left(\sin^2 \frac{\xi h}{2} + \sin^2 \frac{\eta h}{2} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

である. すなわち ξ, η に対して g を (12) とし定めれば, \tilde{u} は差分スキーム (6) を満たす. また, (12) から

$$1 \leq g \leq 1 + 8\rho, \quad \xi, \eta \in \mathbf{R} \quad (13)$$

が成り立つ.

差分スキームが安定であるための条件は, ある定数 C が存在し, 任意の $\xi, \eta \in \mathbf{R}$ と, $\bar{T} \leq -k\Delta t \leq 0$ を満たす任意の $k, \Delta t$ に対して $|g|^k \leq C$ が成り立つことである⁽⁷⁾. しかし (12) から, どの $L \in (1, 1 + 8\rho)$ に対しても, ある $\xi_L, \eta_L \in \mathbf{R}$ に対する

増幅率 g_L は $g_L \geq L$ となる. ここで ρ は定数なので L も定数としてとれる. また $k_{\bar{T}} := [-\frac{\bar{T}}{\Delta t}]$ は $\bar{T} \leq -k_{\bar{T}}\Delta t \leq 0$ であり, $\Delta t \rightarrow 0$ のとき $k_{\bar{T}} \rightarrow \infty$ となる. したがって $\Delta t \rightarrow 0$ のとき $|g_L|^{k_{\bar{T}}} \rightarrow \infty$ が成り立ち, ρ が定数である差分スキーム (6) が不安定であることが示される. ここで $\xi = \xi_L, \eta = \eta_L$ のとき $\|S(h, \Delta t)^{k_{\bar{T}}}\tilde{u}(\cdot, 0)\|_\infty = \|g_L^{k_{\bar{T}}}\tilde{u}(\cdot, 0)\|_\infty = g_L^{k_{\bar{T}}}\|\tilde{u}(\cdot, 0)\|_\infty$ となる. $\|S(h, \Delta t)^{k_{\bar{T}}}\|_\infty \geq g_L^{k_{\bar{T}}} \rightarrow \infty, k_{\bar{T}} \rightarrow \infty$ であり, maximum ノルムの意味で差分スキームは不安定である.

(b) 前進差分を用いた場合

前進差分を用いた差分スキーム

$$\frac{u_{ij}^k - u_{ij}^{k+1}}{\Delta t} = \frac{u_{i+1j}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{i-1j}^{k+1}}{h^2} + \frac{u_{ij+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{ij-1}^{k+1}}{h^2} \quad (14)$$

ただし $i, j = 1, 2, \dots, n-1; k = 0, 1, 2, \dots$

が不安定であることも示すことができる. 後退差分を用いた場合と同様に, 式 (14) へ (11) における \tilde{u} を代入し, 増幅率を計算することで不安定性が示される.

3.4. 差分スキームの解の収束性

3.3 節では差分スキーム (6), (14) がいずれも不安定であることが示された. 微分方程式の初期値問題が適切であるとき, 不安定な差分スキームを用いたとする. このとき以下に示す Lax の同等性定理により, 差分スキームの解が元の初期値問題の解へ収束しないことが導かれてしまう.

定理 3.1 (Lax の同等性定理 (6))

適切な初期値問題と適合した差分スキームが与えられたとき, 差分スキームが安定であることと, 差分スキームの解がもとの微分方程式の解へ収束することとは同値である.

しかし逆向き熱伝導問題は解の安定性が成り立たないという意味で非適切な問題であるから, Lax の同等性定理の枠組から外れる. すなわち, 適合した差分スキームが安定でなくても差分スキームの解が熱方程式の解へ収束する可能性がある. 本研究では差分スキームの収束性は示していない.

4. 多倍長計算

不安定な差分スキーム (6) を用いて数値計算を行うと, 時間ステップ k を進めたとき, 差分スキームの解は発散してしまう. この発散の原因は, 数値計算における丸め誤差や離散化誤差によるわずかな誤差が激しく増幅してしまうからである. 4 節では数値計算で用いる桁数を十分大きくとる多倍長計算によって丸め誤差の累積を抑えることを考える.

4.1. 用いた多倍長計算

多倍長実数 x の表現として 10000 進数, 固定小数点を用いる. 要素数 p の整数型配列の各要素に 10 進 4 桁の正整数 $a_i, i = 0, 1, \dots, p-1$ を格納する. 符号を表す変数には x が

正のとき $\text{sgn} = 1$, 負のとき $\text{sgn} = -1$ を格納する. 小数点以下の桁を格納する配列の要素数が f のとき, 小数点以下の桁数 $\text{frac} = 4f$ 桁となる. このとき

$$p \geq 1, \quad 0 \leq a_i \leq 9999, \quad i = 0, 1, \dots, p-1,$$

$$\text{sgn} = \pm 1, \quad 0 \leq f \leq p-1$$

に対して, x を

$$x = \text{sgn} \sum_{i=0}^{p-1} a_i \times 10000^{i-f}$$

によって表現する. 模式的に以下のように表される.

符号	整数型配列							
±	<table style="border-collapse: collapse; display: inline-table;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">a_{p-1}</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">⋯</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">a_f</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">a_{f-1}</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">⋯</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">a_1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">a_0</td> </tr> </table>	a_{p-1}	⋯	a_f	a_{f-1}	⋯	a_1	a_0
a_{p-1}	⋯	a_f	a_{f-1}	⋯	a_1	a_0		

プログラム言語は C 言語を使用した. 演算は筆算をするように行った.

5. 数値例

正方形領域 $D := (0, 1) \times (0, 1)$ において,

$$\tilde{u}(x, y, t) := \frac{1}{3} \{6(x-0.5)t + (x-0.5)^3 + 6(y-0.5)t + (y-0.5)^3\}$$

によって定められる \tilde{u} は, 熱方程式 (1) を満たす. そこで逆向き熱伝導問題 (1)-(3) におけるデータ f, w を

$$f = \tilde{u} \quad \text{on } \Gamma \times [\bar{T}, 0]$$

$$w = \tilde{u}(\cdot, 0) \quad \text{in } D$$

により与え, 差分スキーム (6) を用いて多倍長計算を行う. 得られた数値解 u_{ij}^k を真の解 u と比較する. 誤差は

$$\text{err}_k := \max_{i,j=0,1,\dots,n} |u_{ij}^k - u(x_i, y_j, t_k)|$$

と定める. ここで, 関数 \tilde{u} は差分スキーム (6) を厳密に満たす. したがって離散化誤差は 0 となり, 数値解には丸め誤差のみが混入することになる.

5.1. 小数点以下の桁数を変化させる

空間分割数 $n = 20$, 空間刻み幅 $h = 0.05$, 時間刻み幅 $\Delta t = 0.25 \times 10^{-4}$, 差分スキームにおける係数 $\rho = 0.01$ を与える. $\text{err}_k \geq 10^{-4}$ となる直前のステップでの数値解を求める.

(a) 小数点以下 28 桁での計算

小数点以下の桁数 $\text{frac} = 28$ 桁として計算を行った. このとき, 時間ステップ $k = 773$, 時刻 $t = -0.019325$ での数値解が得られ, 誤差は $\text{err}_k = 0.99681 \times 10^{-4}$ であった. 数値解を Fig.1 に, 真の解を Fig.2 に示す. Fig.1, 2 から数値解はよい近似解であることがわかる.

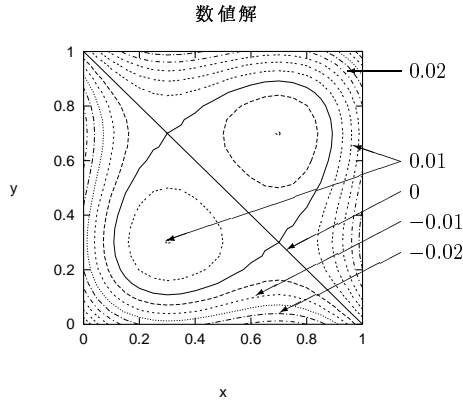


Fig. 1 小数点以下 28 桁に対する数値解

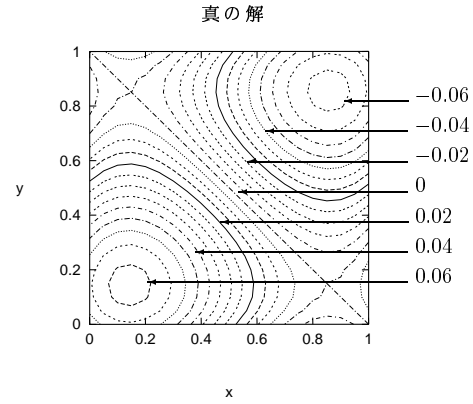


Fig. 4 小数点以下 88 桁に対する真の解

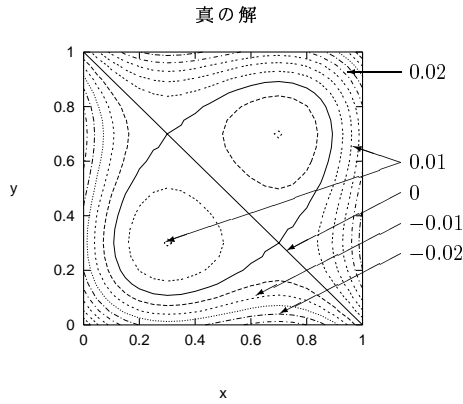


Fig. 2 小数点以下 28 桁に対する真の解

(b) 小数点以下 88 桁での計算

小数点以下の桁数 $\text{frac} = 88$ 桁として計算を行った。このとき、時間ステップ $k = 2594$ 、時刻 $t = -0.06485$ での数値解が得られ、誤差は $\text{err}_k = 0.97985 \times 10^{-4}$ であった。数値解を Fig.3 に、真の解を Fig.4 に示す。Fig.3, 4 から数値解はよい近似解であることがわかる。(a) の結果と比較すれば、小数点以下の桁数を増やしたとき解き進められる時間ステップ数は増えていることがわかる。

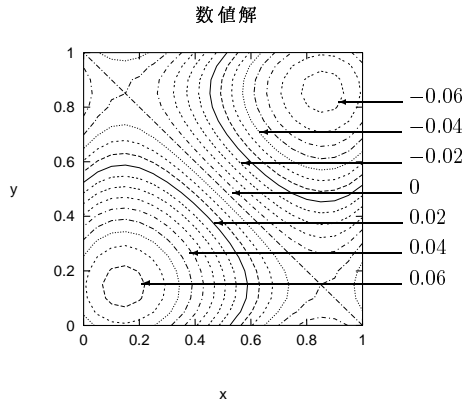


Fig. 3 小数点以下 88 桁に対する数値解

5.2. 小数点以下の桁数に対する、時間ステップと誤差の関係

小数点以下の桁数 frac に対する、時間ステップ k と誤差 err_k をプロットしたグラフから frac , k , err_k の間関係を導く。

(a) 空間分割数 10 の場合

空間分割数 $n = 10$ のときの frac , k , err_k をプロットしたグラフを表示する。Fig.5 では、小数点以下の桁数 $\text{frac} = 28, 60, 88, 120$ に対するグラフを表示した。このグラフに回帰直線を当てはめると、 frac , k , err_k の間に

$$\log_{10} \text{err}_k \approx 0.0314k - \text{frac} \quad (15)$$

という関係式が成立した。Fig.5 では $\text{frac} = 28, 60, 88, 120$ に対して (15) を満たす直線を引いた。実際、直線は実験の点によく当てはまっている。

(b) 空間分割数 20 の場合

空間分割数 $n = 20$ のときの frac , k , err_k をプロットしたグラフを表示する。Fig.6 では、小数点以下の桁数 $\text{frac} = 28, 60, 88$ に対するグラフを表示した。このグラフに回帰直線を当てはめると、 frac , k , err_k の間に

$$\log_{10} \text{err}_k \approx 0.0318k - \text{frac} \quad (16)$$

という関係式が成立することがわかる。Fig.6 では $\text{frac} = 28, 60, 88$ に対して (16) を満たす直線を引いた。実際、直線は実験の点によく当てはまっている。関係式 (15), (16) における k の係数は $n = 10$ のとき 0.0314, $n = 20$ のとき 0.0318 であるので n に対してほとんど変化していない。

5.3. 差分スキームの係数 ρ に対する、時間ステップと誤差の関係

小数点以下の桁数 $\text{frac} = 60$ のとき、差分スキームの係数 ρ に対する、時間ステップ k と誤差 err_k の関係をグラフにプロットする。Fig.7 では $\rho = 0.005, 0.01, 0.02, 0.04$ に対するグラフを表示した。3.3 節における増幅率の関係式 (13) から

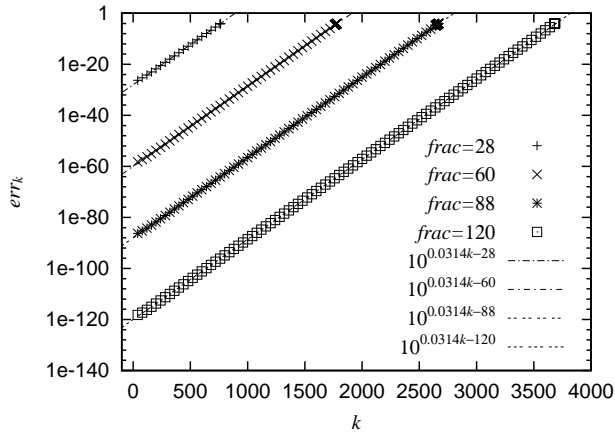


Fig. 5 小数点以下 frac 桁に対する, 時間ステップ k と誤差 err_k の関係 ($n = 10$)

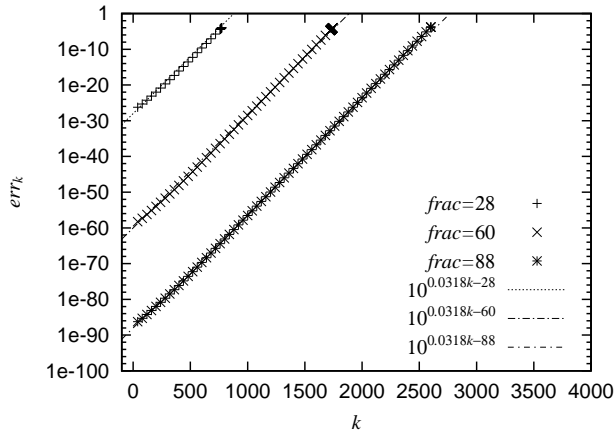


Fig. 6 小数点以下 frac 桁に対する, 時間ステップ k と誤差 err_k の関係 ($n = 20$)

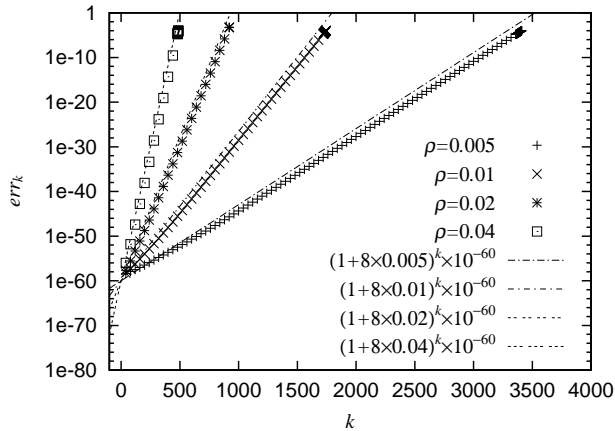


Fig. 7 差分スキームの係数 ρ に対する, 時間ステップ k と誤差 err_k の関係

err_k は時間 1 ステップあたり $1 + 8\rho$ 倍になると考えられる. そこで (15), (16) を考慮すると, ρ, k, err_k の間に

$$err_k \approx (1 + 8\rho)^k \times 10^{-frac} \quad (17)$$

という関係式が成立することが予想される. Fig.7 では $\rho = 0.005, 0.01, 0.02, 0.04$ に対して (17) 式のグラフをプロットした. 実際, グラフは実験の点によく当てはまっている.

6. まとめ

1. 多倍長計算を用いた差分解法により, 熱方程式を逆向きに解いた.
2. 増幅率 g は

$$1 \leq g \leq 1 + 8\rho$$

を満たすことから, 差分スキームが不安定であることが分かった.

3. 離散化誤差 0 の問題を考えるとき, 小数点以下の桁数 frac と差分スキームの係数 ρ に対して, 時間ステップ k と err_k は

$$err_k \approx (1 + 8\rho)^k \times 10^{-frac}$$

という関係を満たすことが分かった. このことから, 与えられた誤差限界内の数値解を得るためには, 多倍長計算で用いる桁数を何桁とればよいかという指標を与えることが可能となる.

4. 離散化誤差を含んだ問題への拡張が今後の課題である.

参考文献

- (1) 今井仁司, 竹内敏己, 磯 祐介, いくつかの逆問題の無限精度計算, 第 50 回理論応用力学講演会講演論文集 NCTAM 2001, (2001), pp. 449-450.
- (2) 磯 祐介, 藤原宏志, 多倍長計算による逆問題の解の数値的再構成の試み, 第 50 回理論応用力学講演会講演論文集 NCTAM 2001, (2001), pp. 451-452.
- (3) R. Kress, Linear Integral Equations, Second Edition, Springer-Verlag, New York (1998).
- (4) J. Liu, Determination of temperature field for backward heat transfer, *Communications of the Korean Mathematical Society*, **16** (2001), No. 3, pp. 385-397.
- (5) L. E. Payne, Improperly posed problems in partial differential equations, *Regional Conference Series in Applied Mathematics*, SIAM, Philadelphia, (1975).
- (6) R. D. Richtmyer and K. W. Morton, Difference Methods for Initial-value Problems, Second Edition, Interscience Publishers, New York · London · Sydney (1967).
- (7) 田辺行人, 高見穎郎 監修, 高見穎郎, 河村哲也, 偏微分方程式の差分解法, 東京大学出版会 (1994).