

二重相反境界要素法を用いた Grad-Shafranov 方程式の解法

Dual Reciprocity Boundary Element Method for Solving the Grad-Shafranov Equation

板垣正文¹⁾, 福永崇顕¹⁾

Masafumi ITAGAKI, Takaaki FUKUNAGA

1) 北海道大学大学院工学研究科 (〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目, E-mail: itagaki@qe.eng.hokudai.ac.jp)

This paper describes the outline of the process to derive the boundary-only integral equation corresponding to the Grad-Shafranov equation that governs the magnetohydrodynamic (MHD) equilibrium in Tokamak plasma. The formulation is a type of dual reciprocity method based on a polynomial expansion of inhomogeneous source term. The discontinuous quadratic boundary elements have been newly introduced to discretize the boundary integral equation. Test calculations demonstrate the high accuracy attained by the present discretization technique. Discussions are also made on the future application of the method to an inverse analysis for reconstructing the current density profile in Tokamak plasma.

Key Words: Tokamak, Grad-Shafranov equation, dual reciprocity method, polynomial expansion, particular solution, boundary-only integral, discontinuous quadratic elements

1. はじめに

トカマク型核融合装置では, トーラス状の真空容器内にプラズマを閉じ込める. プラズマを構成する荷電粒子は磁力線に巻きついて進む性質があり, 容器内の磁力線の配位を適切にすることが良好な閉じ込めの決め手となる.

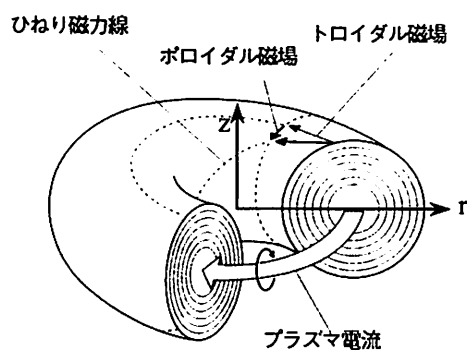


図1 トカマク型装置における磁場のあらし
(文献[1]より転写)

トーラス断面を囲むコイルを多数, トーラス円周に沿って並べて電流を流すと個々のコイルの真ん中を通りぬけるドーナツ形の磁力線ができる. これが図1のトロイダル磁場である. 一方, プラズマ自身に電流を流し, プラズマ電流を囲むように一周するポロイダル磁場を作る. 2種類の磁場が合成され, 図1に示すようにトーラスに沿って周回するひねり磁力線ができる. この磁力線が作る仮想的な環の表面を磁気面と呼

び, プラズマ中には無数の磁気面が入れ子状に配置された構造となる[1].

図1より類推できるように, 3次元空間に置かれたトーラス状プラズマは回転軸対称とみなせるので, 上述の磁気面構造を2次元の r - z 体系で解析することに支障はない. このような軸対称プラズマの磁気流体学 (MHD) 平衡は磁束 ψ に関する Grad-Shafranov 方程式で記述される[2]. この方程式の数値解を求めることはプラズマの形状を調べる上で重要である. この方程式を解くために広く使われている数値解法は差分法や有限要素法などの領域型解法であるが[3,4], 近年, 境界要素法を適用する試み[5-8]も現れている. 境界要素法の最大の利点は境界のみを離散化すれば足りることにある. この利点は形状データの作成と修正を繰り返すような解析においては極めて重要となる. すなわち, 核融合装置の運転においてプラズマ形状の変遷に伴って頻繁に要求されるプラズマ平衡解析に境界要素法が適していると考えられる.

Grad-Shafranov 方程式を境界積分方程式に変換する際, プラズマ電流に関わる非斉次項 $\mu_0 r j_\theta$ の存在がネックとなる. 何らの考慮もされないと, この項の寄与が領域積分のまま残り, 境界要素法の利点が損なわれる. しかし, 著者らの知る限り, Grad-Shafranov 方程式を境界要素法で解く試みのほとんどは, 非斉次項の領域積分を境界積分に変換することなく扱うもの[8]や, 元々非斉次項の無い真空磁場に適用したもの[5-7]に限られていた.

本稿では, 上記の非斉次項に起因する領域積分を等価な境界積分に変換する手法を紹介する. そのトリックは3節

に示すように、Grad-Shafranov 方程式の $\mu_0 j_\phi$ の項を多項式展開し、その領域積分に Green の第 2 公式を適用することにある。この変換において主要な役割を演じるのは、多項式を非斉次項に持つ Grad-Shafranov 方程式の特解である。

固定境界問題として Grad-Shafranov 方程式を解くことは、プラズマ電流密度が未知の磁束の関数となるため、同時に固有値問題となる。この種の固有値探索は多数回の反復計算となるが、全体行列作成のための境界積分の計算は反復初回にしておけば更新の必要はない。多項式展開の係数のみが反復によって更新される。展開係数を決定するために必要なもう一つの行列も反復によらず不変である。したがって、固有値反復の回数はトータルの計算時間には大きく寄与しない。4 節で記すように、この固有値を定めるために別種の領域積分が必要となるが、この領域積分も境界積分に変換可能なことが示される。本稿で示す手法は、以上により、いかなる領域積分の計算も必要としない。5 節に非適合 2 次境界要素を用いた数値計算例を示す。

式(14)で与える境界積分方程式は、境界形状と境界条件が確定した後、プラズマ内部の電流密度分布を推定する逆解析に有用となる可能性がある。その理由は 6 節に記す。

2. Grad-Shafranov 方程式

アンペールの法則 $\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$ をトーラス軸対称(r - z)系に焼き直した偏微分方程式として

$$-\left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \psi = \mu_0 r j_\phi \quad (1)$$

が導かれる [2]。ここに j_ϕ はプラズマ電流密度のトロイダル成分、 μ_0 は真空中の透磁率、 ψ はプラズマ電流に起因して形成される磁束である。ベクトルポテンシャルのトロイダル成分 A_ϕ を用いれば $\psi = r A_\phi$ とかけられる。ところでプラズマを理想気体とみなせば $p = nkT$ の圧力を持つので、磁気閉じ込め方式ではプラズマ周囲の磁場が圧力(磁気圧)として作用し、プラズマと閉じ込め磁場との圧力平衡

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p \quad (2)$$

が保たなければならない。式(2)をも軸対称系に適用すると、式(1)の右辺はさらに詳しく書き直されて

$$-\left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \psi = \mu_0 r^2 \frac{dp}{d\psi} + \frac{d}{d\psi} \left(\frac{F^2}{2} \right) \equiv \mu_0 r j_\phi \quad (3)$$

のようになる [2]。ここに、 F はポロイダル電流関数と呼ばれる量であり、圧力 p とともに磁束 ψ のみの関数(磁気面関数)である。式(3)は Grad-Shafranov 方程式と呼ばれる。ただし、本稿では便宜上、式(1)と(3)の両方を共に Grad-Shafranov 方程式と呼ぶことにする。

3. 境界積分方程式

式(1)に対応させて、点 $i(a, b)$ に単位トロイダル電流が置かれたときに考察フィールド点 (r, z) における磁束、すなわち基本解 ψ^* を与える補助方程式

$$-\left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \psi^* = r \delta_i \quad (4)$$

を導入する。ここに δ_i は $\delta(r-a)\delta(z-b)$ を表わし、基本解 ψ^* は第 1 種と第 2 種の完全楕円積分 $K(k), E(k)$ を用いて、

$$\psi^* = \frac{\sqrt{ar}}{\pi k} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right] \quad (5)$$

で与えられる。ただし、

$$k^2 = \frac{4ar}{(r+a)^2 + (z-b)^2} \quad (6)$$

である。式(1)(4)左辺の微分演算子をラプラス演算子を含む形に書き直すと、式(1)(4)はそれぞれ、

$$-r \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{\psi}{r} \right) = \mu_0 r j_\phi \quad (7a)$$

$$-r \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{\psi^*}{r} \right) = r \delta_i \quad (7b)$$

となる。そこで、 $\psi^*/r^2 \times$ 式(7a) $- \psi/r^2 \times$ 式(7b)を領域 $\Omega(r, z)$ にわたって積分し、さらに、Green の第 2 公式

$$\int_{\Omega} (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (8)$$

を適用する。 $d\Omega = 2\pi r dr dz$ および $d\Gamma = 2\pi r \sqrt{dr^2 + dz^2}$ であるが、途中、両者の 2π が割愛できるので、改めて $d\Omega = r dr dz$ 、 $d\Gamma = r \sqrt{dr^2 + dz^2}$ と書き、かつ、 r を省いた $d\Omega' = dr dz$ と $d\Gamma' = \sqrt{dr^2 + dz^2}$ なる量を定義すれば、

$$c_i \psi_i = \int_{\Gamma} \left(\frac{\psi^*}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\psi}{r} \frac{\partial \psi^*}{\partial n} \right) d\Gamma' + \int_{\Omega} \frac{\psi^*}{r^2} (\mu_0 r j_\phi) d\Omega \quad (9)$$

を得る。ここに $\partial/\partial n$ はトーラスの断面において外向きを正とした法線方向微分を表わす。特異点パラメータ c_i は領域内部で 1.0、滑らかな境界上で 1/2 となる。

式(9)の右辺第 2 項は未だ領域積分のかたちで残されている。そこで、式(1)の右辺を

$$\mu_0 r j_\phi = \sum_{l, m} \alpha_{l, m} \xi^l \eta^m \quad (l \geq 0, m \geq 0) \quad (10)$$

のように多項式展開し、ここに、 L_r, L_z, z_0 を任意の定数として無次元量 $\xi = r/L_r$ 、 $\eta = (z - z_0)/L_z$ を用いる。いま、

$$-r \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{\varphi^{(l, m)}}{r} \right) = \xi^l \eta^m \quad (11)$$

を満たす特解 $\varphi^{(l, m)}$ として、

$$\varphi^{(l, m)} = -\frac{L_z^2 \xi^l \eta^{m+2}}{(m+1)(m+2)} \times \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{s=1}^k \left\{ \frac{-(l-2s+2)(l-2s)}{(m+2s+1)(m+2s+2)} \left(\frac{L_z \eta}{L_r \xi} \right)^2 \right\} \right] \quad (12)$$

を選ぶことができる[9]. 式(11)と Green の第 2 公式を適用すると, 式(9)の右辺第 2 項は

$$\int_{\Omega} \frac{\psi^*}{r^2} (\xi^l \eta^m) d\Omega = c_l \varphi_l^{(l,m)} - \int_{\Gamma} \left[\frac{\psi^*}{r} \frac{\partial \varphi_l^{(l,m)}}{\partial n} - \frac{\varphi_l^{(l,m)}}{r} \frac{\partial \psi^*}{\partial n} \right] d\Gamma \quad (13)$$

のように境界積分に変換できるので, 多項式近似したソース項を持つ Grad-Shafranov 方程式を

$$c_l \psi_l - \int_{\Gamma} \left[\frac{\psi^*}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\psi}{r} \frac{\partial \psi^*}{\partial n} \right] d\Gamma = \sum_{l,m} \alpha_{l,m} \left\{ c_l \varphi_l^{(l,m)} - \int_{\Gamma} \left[\frac{\psi^*}{r} \frac{\partial \varphi_l^{(l,m)}}{\partial n} - \frac{\varphi_l^{(l,m)}}{r} \frac{\partial \psi^*}{\partial n} \right] d\Gamma \right\} \quad (14)$$

のように, プラズマ境界 Γ に沿った積分のみで表わすことができる[9]. 以上の導出過程は Poisson 型方程式に対する二重相反法(DRM) [10] とほぼ同様なものである.

4. 固有値反復計算

Grad-Shafranov 方程式の右辺ソース項はしばしば

$$\mu_0 j_\phi = c_0 \{ \beta_p r^2 + (1 - \beta_p) R_0^2 \} (1 - X)^{0.6} \quad (15)$$

のような簡便な表式で与えられる. ここに,

$$X = (\psi - \psi_M) / (\psi_S - \psi_M)$$

であり, ψ_M と ψ_S は磁気軸およびプラズマ境界での磁束の値, β_p と R_0 はそれぞれ, ポロイダル β 値と主半径特性値を表わす. 式(15)は式(3)右辺の型式, すなわち平衡条件の式(2)を満たすように作られている. 式(15)は未知量である磁束の関数となっており, この種の順解析では固有値反復の手法が採られる.

4.1 べき乗法による固有値探索

ここで, Grad-Shafranov 方程式を固有値 $\lambda^{(n)}$ を用いて,

$$-\Delta \psi^{(n)} = \lambda^{(n-1)} f(r, \psi^{(n-1)}) \equiv S^{(n)}, \quad (n \geq 1) \quad (16)$$

のように書き換える. ここに,

$$f(r, \psi^{(n)}) \equiv \mu_0 j_\phi^{(n)} / \lambda^{(n)} \quad (17)$$

であり, $f(r, \psi^{(n)})$ の値は式(15)のような相関式を使って計算される. 固有値の反復は,

$$\lambda^{(n-1)} \int_{\Omega} f(r, \psi^{(n-1)}) d\Omega = \lambda^{(n)} \int_{\Omega} f(r, \psi^{(n)}) d\Omega \quad (18)$$

の関係が反復によらず保持されるようになされる. すなわち, 固有値は

$$\lambda^{(n)} = \lambda^{(n-1)} \frac{\int_{\Omega} f(r, \psi^{(n-1)}) d\Omega}{\int_{\Omega} f(r, \psi^{(n)}) d\Omega} \quad (19)$$

にしたがって更新される. 反復初回には一様ソース $S^{(1)} = \text{const.}$ を仮定して式(16)を境界要素法で解き, 磁束 $\psi^{(1)}$ さらに $f(r, \psi^{(1)})$ を得る. プラズマ領域内の多数点における $f(r, \psi^{(1)})$ の値をサンプリングして式(10)の展開係数を決定し, これが次回の $\psi^{(2)}$ の計算に使われる. このように, 固有値 $\lambda^{(n-1)}$ がいったん定まれば, 引き続き境界要素法により $\psi^{(n)}$ を計算する. 以上の手続きは収束条件

$$\varepsilon^{(n)} = \left| (\lambda^{(n)} - \lambda^{(n-1)}) / \lambda^{(n-1)} \right| < 10^{-5} \quad (20)$$

が満たされるまで繰り返される. 以上の反復過程は原子炉臨界計算における中性子源反復計算とほぼ等価である[11].

4.2 展開係数の決定

プラズマ領域 Ω を取り囲む矩形領域を定義し, この矩形領域内に多数のサンプリング点を一様に発生させる. 矩形領域内に発生させた点 $w_0 = (r_0, z_0) \equiv r_0 + iz_0$ が Ω 中にあるか外にあるかは, 留数の定理にしたがって自動的に判別される[12]. すなわち, 複素積分

$$\int_{\Gamma} \frac{dw}{w - w_0} \begin{cases} = 2\pi i & \text{for } w_0 \in \Omega \\ = 0 & \text{for } w_0 \notin \Omega \end{cases} \quad (21)$$

の結果による. Ω 内部の全てのサンプリング点に対して $\mu_0 j_\phi$ の値を式(15)のような相関式にしたがって計算する. $\mu_0 j_\phi$ の分布に基づき, 係数 $\alpha_{l,m}$ は特異値分解法[13]に基づいて決定される.

4.3 固有値計算のための境界積分

興味深いことに, 式(19)に現れる領域積分

$$\int_{\Omega} f(r, \psi) d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{l,m} \alpha_{l,m} \xi^l \eta^m d\Omega$$

も境界積分に変換可能である.

$$\nabla^2 \phi^{(l,m)} = \xi^l \eta^m \quad (22)$$

を満たす特解 $\phi^{(l,m)}$ を利用し, Gauss の発散定理を上記の領域積分に適用すれば

$$\int_{\Omega} \sum_{l,m} \alpha_{l,m} \xi^l \eta^m d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{l,m} \alpha_{l,m} \nabla^2 \phi^{(l,m)} d\Omega = \int_{\Gamma} \sum_{l,m} \alpha_{l,m} \frac{\partial \phi^{(l,m)}}{\partial n} d\Gamma \quad (23)$$

を得る. 特解は

$$\phi^{(l,m)} = \sum_{s=1}^{\left[\frac{m+2}{2} \right]} c_s \xi^{l+2s} \eta^{m-2s+2} + \sum_{s=1}^{\left[\frac{l+2}{2} \right]} d_s \xi^{l-2s+2} \eta^{m+2s} \quad (24)$$

で与えられる. ここに, $[\]$ は引数の整数部分を表わし, 定数 c_s と d_s は漸化式にしたがって計算される[9].

5 数値計算例

以上の定式化の妥当性検証を目的とした以下の数値計算では, 後で図 5 中に見られるプラズマ境界上の所謂 X 点等の「かど点」が無理なく扱え, 離散化の精度にも優れる非適合 2 次境界要素[14]を本稿のため新たに導入した.

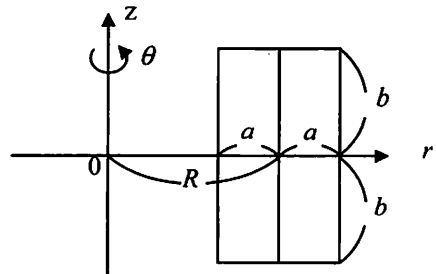


図 2 矩形プラズマ

5.1 矩形プラズマ

図2に示すような仮想的な矩形プラズマを考える。各辺に境界条件 $\psi = 0$ が課せられているとする。この場合、式(1)に対応させて、単項式ソース $r^l z^m$ を持つ方程式

$$-\left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \psi = r^l z^m \quad (l \geq 0, m \geq 0).$$

には、解析解が存在する[9]。

ここで、 $a = 0.5[\text{m}]$, $b = 0.5[\text{m}]$, $R = 1.0[\text{m}]$ のように仮定する。矩形の各辺を等分割して24個の非適合2次境界要素を用いたので節点数は計72個を要した。 $0 \leq l+m \leq 8$ の範囲にある全ての整数について、境界要素解と解析解を比較した。一例として、単項式 $r^3 z^2$ に基づく磁束 ψ の境界要素解を図3の等高線で示す。解析解との相対偏差の分布を図4に示す。領域内の大部分において相対偏差は0.01%を下回っている。1%を超える相対偏差が矩形のかどや辺の近傍で見られるが、これらの位置での ψ の絶対値は極めて小さい。以上とほぼ同様の精度が他の l と m の組み合わせに対しても示されている。

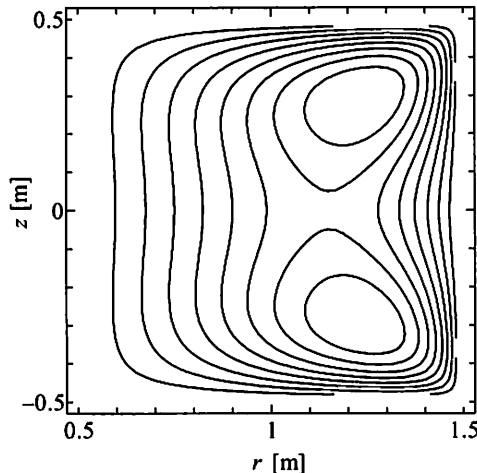


図3 $r^3 z^2$ に対する磁束の境界要素解

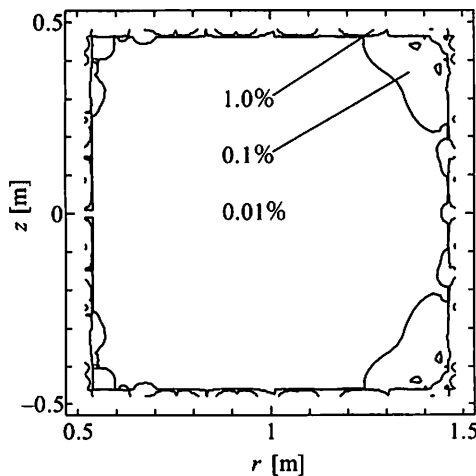


図4 境界要素解と解析解の相対偏差

5.2 トカマク型のプラズマ

より現実的な例題として、トカマク型のプラズマを考え

る。日本原子力研究所のご厚意により、プラズマ境界、プラズマ電流と磁束の分布のデータが提供された。これらは原研が所有する平衡計算コード SELENE[3]によって解析されたものである。SELENE は有限要素法に基づいており、磁束の計算精度を向上させるため有限要素が常に磁気面に沿って並ぶようにメッシュ構造を反復補正する工夫がされている[3]。この平衡計算では、磁束と電流密度の関係は前述の式(15)にしたがい、 $\beta_p = 0.70$, $R_0 = 3.50 \text{ m}$ とした。境界要素法では、この問題を固定境界問題として扱った。SELENE コードによる基準計算結果からは境界形状のみが境界要素計算の入力データとして渡された。境界条件 $\psi = 0$ が境界上の全てのノード点に課せられ、電流密度の相関式は SELENE コードと同様、式(15)を共通に用いた。

プラズマ電流密度に関わる $\mu_0 j_\phi$ の分布は完全8次、すなわち、45個の項からなる2次元多項式に近似した。多項式展開係数の決定のために、4.2節に示した手順に基づいてプラズマ領域内に計1776点のサンプリング点を設けた。プラズマ境界は44個の非適合2次境界要素に分割、節点132個で近似した。

境界要素計算において固有値反復は式(20)で示した偏差が 10^{-5} 以下になるまで8回の反復を要した。SELENE コードによるCPU時間がAlpha CPU-21164A (600MHz)で約1秒程度であるのに対し、境界要素計算は現時点で10秒前後を要しており、計算時間の点では必ずしも有利ではない。境界要素計算の大部分は境界積分に費やされるが、その数値技法は未だ最適化の余地がある。境界積分は個々の i 点ごとに独立に計算して支障が無いので、将来、並列計算化を図れば大幅にCPU時間を削減できる可能性がある。計算機性能の今後の向上も併せ考えれば、著者らはCPU時間の問題を悲観的には捉えていない。固有値反復の初回以降に消費した計算時間は全体の僅か5%程度であり、反復の回数は全計算時間に大きく影響しないことがわかる。

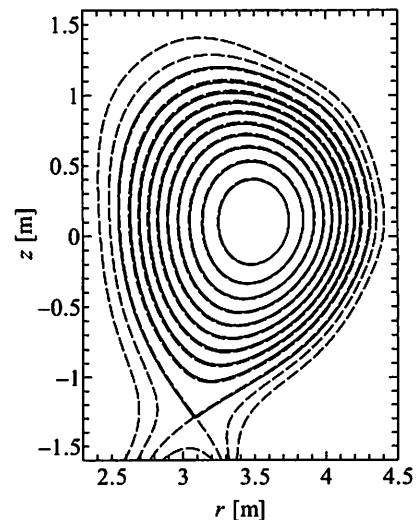


図5 磁束の等高線

境界要素計算で得た磁束分布の結果を SELENE の基準計算結果と共に図5に等高線で示す。電流密度分布の比較

を図6に示す。いずれの図においても実線が境界要素法、破線がSELENEによる基準計算の結果である。境界要素解は基準解と極めてよく一致し、境界積分のみによる定式化の妥当性と非適合2次境界要素による近似の精度が立証された。

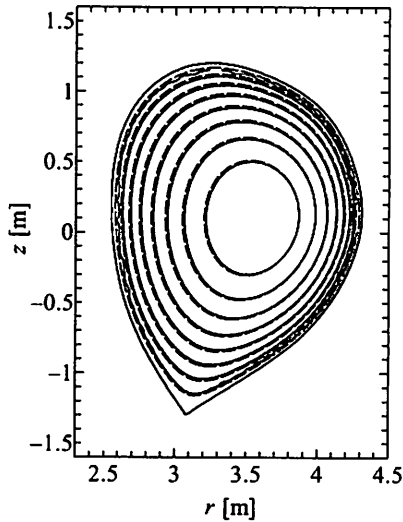


図6 プラズマ電流密度の等高線

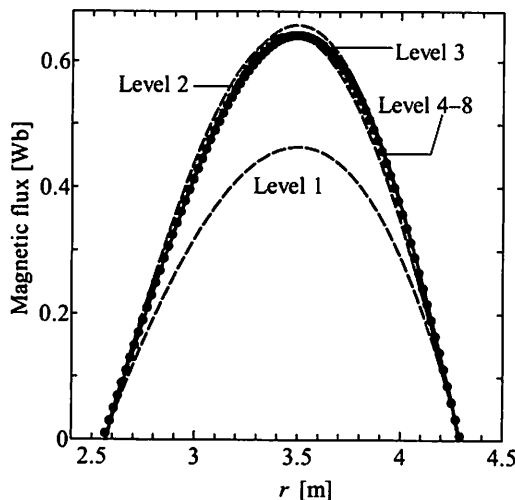


図7 z=0線上の磁束分布

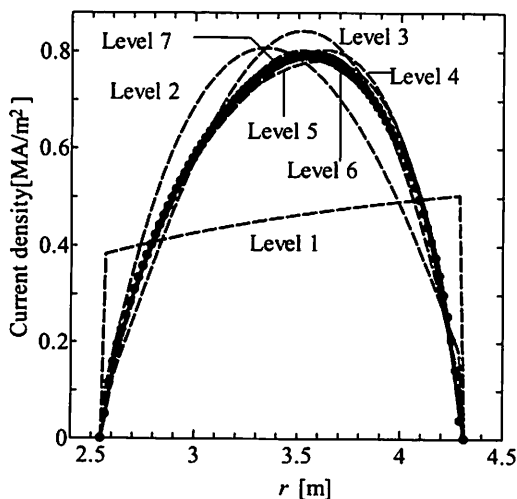


図8 z=0線上のプラズマ電流密度分布

$z=0$ の直線に沿った磁束とプラズマ電流密度の分布をそれぞれ、図7と図8に示す。点線はSELENEによる基準計算結果、実線は完全8次多項式による境界要素計算結果、破線は完全1次から7次までの多項式に基づく境界要素計算結果を示している。図7と図8中で'Level'とあるのは、その次数である。

6 逆解析への適用可能性について

境界積分方程式(14)はプラズマ電流密度分布の逆推定に便利な形式をしている。それを可能とする著者らの研究プランを以下に紹介する。栗原の「コーシー条件面法[7]」によれば、プラズマ境界の外側に置かれた磁気プローブやフラックス・ループと呼ばれる磁気センサーの信号に基づいて、プラズマ境界形状のみならず、境界上の $\partial\psi/\partial n$ の値を評価することが出来る。このことは、いったん境界形状が決まれば、式(14)に残された未知数はもはや多項式展開係数 $\alpha_{l,m}$ 以外に無いことを意味する。展開係数ひいては $\mu_0 j_p$ の決定には、しかし、解の一意性を保証するために、以下に示すような種々の先験情報や物理的拘束条件を加えてやる必要がある。

- (1) プラズマ総電流が既知である。
- (2) プラズマ境界上の電流はゼロである。
- (3) 平衡条件 $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla p$ から導かれる拘束条件。(この目的で、栗原が導いた電流密度と磁束を関係づける関係式[15]をさらに変形すれば、磁束の等しい2点に対して

$$G(\psi) \equiv \left(r \frac{\partial}{\partial r} - r \frac{\partial \psi / \partial r}{\partial \psi / \partial z} \frac{\partial}{\partial z} - 2 \right) \sum_{l,m} \alpha_{l,m} r^l z^m \quad (25)$$

なる量も等しいという条件を設定できる。この場合、磁束と電流密度を交互に求めるため反復計算となる。))

- (4) プラズマ内部の若干数の点において電流密度または電流密度に密接に関係する物理量が測定できると仮定する。(電流密度解の一意性を保証するため、この条件は必須であるというのがこの分野において定着した見解である[16]。運動的シュタルク効果(MSE)を用いて、粗い精度ではあるが若干数の点において電流密度の実時間測定が可能とする最近の報告がある[17]。)

これらの条件は全て、式(10)の多項式展開に作用させる形式で記述することが出来る。これらを境界積分方程式(14)の離散化によって得る行列方程式と結合させると、展開係数 $\alpha_{l,m}$ を未知数とする連立1次方程式が得られる。この時の全体行列は未知数の数に比べてデータ行の数ははるかに多いものとなり、特異値分解法[13]がその解法に適している。そしてこの場合、非適切性の緩和にTikhonovの正則化法[18]を取り込むことが容易である。具体的な手法について現在、開発を進めている。

7 結言と今後の課題

本研究で示した境界要素法はいかなる領域計算も必要としない。式(14)で示した境界積分方程式には領域積分項は

含まれていない。さらに4.3節に示したように、固有値の計算過程すらも境界積分のみで進められる。多項式展開係数の決定のためにプラズマ領域内部に多数のサンプリング点を発生させる必要があるものの、これらは留数の定理にしたがって計算コード内で自動的になされる。

境界上の $\partial\psi/\partial n$ の値と多項式展開係数は固有値反復の度に更新されるが、境界積分方程式の離散化による行列も、展開係数決定のための行列も、反復を通して不変である。したがって $\partial\psi/\partial n$ の値と展開係数は単に行列と源ベクトルの単純な乗法演算のみから定まり、固有値反復の回数は全計算時間に大きく影響しない。

テスト計算の結果、ここで示した境界積分のみからなる定式化ならびに非適合2次境界要素による離散化は高精度で安定な解を与えることが示された。

本稿で示した数値計算例は固定境界問題に限定されているが、反復最適化機能を付加すれば自由境界問題への拡張は可能である。ポロイダルコイル電流の項を非斉次項に加えればさらに適用性が拡大する。境界のみを離散化すればよい本手法の利点に着目すれば、時間と共にプラズマの境界形状が変化する「移動境界問題」への応用も興味深い。

SELENEコード等の領域型解法に比した利点として、1節では境界のみの離散化に派生するいくつかを記した。このほか、SELENEコードにはプラズマ境界上の $\partial\psi/\partial n$ を計算する機能はなく、強いて差分や外挿で求めてもその精度は境界要素解の比ではない。式(14)に基づいて6節に記した逆解析が可能となるのは、境界上に $\partial\psi/\partial n$ を設定できるからである。境界積分方程式に頼らない他の逆解析手法[19]では、プラズマ境界に $\partial\psi/\partial n$ の条件を課すのではなく磁気センサー信号と整合するように順解析を反復する手法が採られ、電流密度分布は式(15)のようにパラメータ数の少ない相関式で粗く近似している。本稿で示した電流密度の高次多項式展開はより一般性を持つものであり、多項式展開であるがゆえに種々の拘束条件も設定しやすい。

謝辞

本稿には、平成15年度の日本原子力研究所との「臨界プラズマ試験装置(JT-60)の実験・解析に関する協力研究」の成果を含みます。同研究所の二宮博正、栗原研一両博士には、本研究への有益なコメントのほか、JT-60核融合装置に関わる貴重なデータの提供、SELENEコードの使用等につき、格別のご配慮を賜りました。謹んで感謝申し上げます。

参考文献

- (1) 狐崎晶雄, 吉川庄一, ブルーバックス B-1404 新・核融合への挑戦, (2003) 講談社.
- (2) WESSON, J., "Tokamaks (Second edition)", The Oxford Engineering Series 48, Clarendon Press, Oxford (1997).
- (3) TAKEDA, T., TSUNEMATSU, T., A Numerical Code SELENE To Calculate Axisymmetric Toroidal MHD Equilibria, JAERI-M 8042, Japan Atomic Energy Research Institute (1978).

- (4) McCLAIN, F.W., BROWN, B.B., GAQ, A Computer Program to Find and Analyze Axisymmetric MHD Plasma Equilibria, GA-A 14490, General Atomic Company (1977).
- (5) BRAAMS, B.J., Interpretation of tokamak magnetic diagnostics, report IPP 5/2, Max Plank Institute für Plasma Physics (1985).
- (6) HAKKARAINEN, S.P., FREIDBERG, J.P., Reconstruction Of Vacuum Flux Surfaces From Diagnostic Measurements In A Tokamak, report PFC/RR-87-22, MIT Plasma Fusion Center (1987).
- (7) KURIHARA, K., A New Shape Reproduction Method Based on the Cauchy-Condition Surface for Real-Time Tokamak Reactor Control, *Fusion Eng. Des.*, **51-52** (2000) 1049.
- (8) KURIHARA, K., Tokamak Plasma Shape Identification on the Basis of Boundary Integral Equations, *Nuclear Fusion*, **33**[3] (1993) 399.
- (9) ITAGAKI, M., KAMISAWADA, J., OIKAWA, S., Boundary- only integral equation approach based on polynomial expansion of plasma current profile to solve the Grad-Shafranov equation, *Nuclear Fusion*, **44** (2004) 427.
- (10) PARTRIDGE, P.W., BREBBIA, C.A., WROBEL, L.C., The Dual Reciprocity Boundary Element Method, Computational Mechanics Publications, Southampton / Boston, Co-published with Elsevier Applied Science, London / New York (1992).
- (11) ITAGAKI, M., Boundary element methods applied to two-dimensional neutron diffusion problems, *J. Nucl. Sci. Technol.*, **22** (1985) 565.
- (12) GIPSON, G.S., Use of the residue theorem in locating points within an arbitrary multiply-connected region, *Advances in Engineering Software*, **8**[2] (1986) 73.
- (13) PRESS, W.H., FLANNERY, B.P., TEUKOLSKY, S.A., VETTERLING, W.T., "Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing", Cambridge University Press, Cambridge (1986).
- (14) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行, 計算力学とCAEシリーズ2 境界要素法 (1991) 培風館.
- (15) KURIHARA, K., Current Profile Reproduction Study on the Basis of a New Expansion Method with the Eigenfunctions Defined in the Tokamak Plasma Interior, *Fusion Technology*, **34** (1998) 548-552.
- (16) PUSTOVITOV, V.D., Magnetic diagnostics: General principles and the problem of reconstruction of plasma current and pressure profiles in toroidal systems, *Nuclear Fusion*, **41**[6] (2001) 721.
- (17) PETTY, C.C., FOX, W.R., LUCE, T.C., MAKOWSKI, M.A., SUZUKI, T., Analysis of current drive using MSE polarimetry without equilibrium reconstruction, *Nuclear Fusion*, **42** (2002) 1124.
- (18) HANSEN, P.C., "Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems - Numerical Aspects of Linear Inversion", SIAM, Philadelphia (1998).
- (19) LAO, L.L., St. JOHN, H., STAMBAUGH, R.D., KELLMAN, A.G., PFEIFFER, W., Reconstruction of Current Profile Parameters and Plasma Shapes in Tokamaks, *Nuclear Fusion*, **25** (1985) 1611.