

**構造力学 2 および 演習**  
**— 講義録 —**

C クラス (西村教授)

2005 年度暫定版

# 目次

第1章	トラスにおける仮想仕事	3
1.1	構成関係	3
1.2	トラスの変形	4
1.3	力のつりあい	7
1.3.1	節点力と部材力	7
1.3.2	力のつりあい	8
1.4	トラスの境界条件	10
1.5	トラスの問題を解く事の意味	10
1.6	仮想仕事の原理	13
1.7	仮想仕事の応用	14
1.7.1	単位荷重法による変位の求め方(静定トラスの場合)	14
1.7.2	不静定トラスの解法	22
1.7.3	単位荷重法による変位の求め方(不静定トラスの場合)	26
1.8	エネルギー原理	32
1.8.1	補ポテンシャルエネルギー停留原理	32
1.8.2	Castiglianoの定理	38
1.9	相反性定理	45
1.9.1	相反性定理と証明	45
1.9.2	相反性定理の応用 — Müller-Breslauの方法	46
1.10	トラスの変位法による解法	50
1.10.1	変位法	50
1.10.2	変位法 + 仮想仕事によるトラスの解法	53
1.10.3	変位法 + エネルギー法によるトラスの解法	54
第2章	はりにおける仮想仕事	56
2.1	線形弾性体の力学	56
2.1.1	変形	56
2.1.2	表面力と応力	58
2.1.3	構成関係(応力-ひずみ関係)	61
2.2	はり理論(Bernoulli-Eulerのはり理論)	63
2.2.1	変形に関する仮定	63
2.2.2	応力に関する仮定	64
2.2.3	曲げモーメント-曲率関係	64
2.2.4	断面力・軸力のつりあい	65

2.2.5	モーメントのつりあい	66
2.2.6	はりの微分方程式	67
2.2.7	境界条件	67
2.3	仮想仕事の原理 (一本のはりの場合)	69
2.3.1	つりあい系	69
2.3.2	適合系	70
2.3.3	仮想仕事の原理	70
2.4	仮想仕事の原理 (ラーメンの場合, 剛結の場合)	72
2.5	仮想仕事の原理 (ラーメンの場合, ヒンジを含んでいる場合)	74
2.6	仮想仕事の原理の応用	74
2.7	梁におけるエネルギー原理	88
2.8	梁における相反定理	97
2.8.1	相反定理	97
2.9	変位法によるはりの解法	108
2.9.1	はりの変位法の特徴	108
2.9.2	変位法を用いた単一のはり区間における近似解の構成	109
2.9.3	はり構造の有限要素法	113
2.9.4	より一般的な平面はり構造の有限要素法のために	114
<b>第3章</b>	<b>不静定はり構造の手計算による解法</b>	<b>116</b>
3.1	弾性方程式	116
3.2	三連モーメント式による解法	120
3.3	たわみ角法	126
<b>第4章</b>	<b>座屈</b>	<b>131</b>
4.1	Euler の座屈理論	131
4.1.1	定式化	131
4.1.2	境界条件	132
4.1.3	基礎方程式の一般解	133
4.1.4	はりの座屈荷重	133
4.2	座屈理論の応用	139
4.2.1	トラスの座屈	139
4.3	座屈後の安定性	141

# はじめに

## 講義内容

講義の内容は以下の三つである．

- 仮想仕事の原理 (トラス, はり)
- 不静定構造の古典的な解法 (三連モーメント, たわみ角法)
- 座屈

## 参考図書

参考図書を挙げておく．

1. 田村武, 線形代数, 共立出版, 1994.
2. 田村武, 構造力学—仮想仕事の原理を通して—, 朝倉, 2003.
3. 小林昭一, 構造力学 [基礎/理論] 上・下, 培風館, 1990.
4. 西村直志, 構造力学オンラインテキスト—<http://gspsun1.gee.kyoto-u.ac.jp>

特に, 構造力学のより厳密な詳細を知りたい方には 4. がお勧めです．

## 本冊子について...

本冊子は, 西村直志教授 (media) の校閲の下に, Teaching Asistant の増田, 高橋, 吉田が講義ノートを編集して作成し, 足立が patch を当てたものです. 講義および本冊子の内容に関する質問は, 学術情報 media center (北館) の西村研究室に直接来ていただくか, 西村教授への電子メール ([nchml@media.kyoto-u.ac.jp](mailto:nchml@media.kyoto-u.ac.jp)) にて受け付けます. お気軽にどうぞ. なお, 文責は以下の通りです.

- 図 : 増田 康男  
1.1 節 ~ 2.5 節 : 高橋 徹  
2.6 節 ~ 4.3 節 : 吉田 研一

# 第1章 トラスにおける仮想仕事

## 1.1 構成関係

物質の力学的な応答の関係(応力とひずみ, 力とのびの関係など)を表すのが構成関係(構成式)である. 本講義で扱うトラスの材質は線形弾性体であると仮定する. この場合, 構成関係は Hooke の法則として与えられる(2.1 節参照). さらに, 部材はその軸方向にだけ力を受けて変形する(伸縮する)と仮定するので, Hooke の法則は軸方向に関する応力とひずみについて次のように書ける.

$$(\text{部材の軸方向応力}) = E \times (\text{部材の軸方向ひずみ}) \quad (1.1)$$

ここに,  $E$  は Young 率である.

後の節と説明の順番が前後するが, 部材ののびとその部材力を用いて式(1.1)を具体的に表しておこう. まず, 部材の軸方向応力は, 部材に加わる軸方向の力  $N$  (これを部材力あるいは軸力という)を部材の断面積  $A$  で割った値である. すなわち,

$$(\text{部材の軸方向応力}) = \frac{(\text{部材力 } N)}{(\text{部材断面積 } A)}$$

である. 部材力  $N$  については1.3節で詳しく述べる. 他方, 部材の軸方向ひずみは, 部材の変形によって生じる軸方向ののび  $\delta$  (以下単にのび)を用いて,

$$(\text{部材の軸方向ひずみ}) = \frac{(\text{部材ののび } \delta)}{(\text{変形前の部材の長さ } \ell)}$$

と与えられるものである. ここで,

$$(\text{部材ののび } \delta) = (\text{変形後の部材の長さ}) - (\text{変形前の部材の長さ } \ell)$$

であり, 具体的には1.2節で説明する. 以上の三式を式(1.1)に代入すれば, 線形トラスの構成関係は,

$$\delta = \frac{N\ell}{EA} \quad (1.2)$$

と書ける.

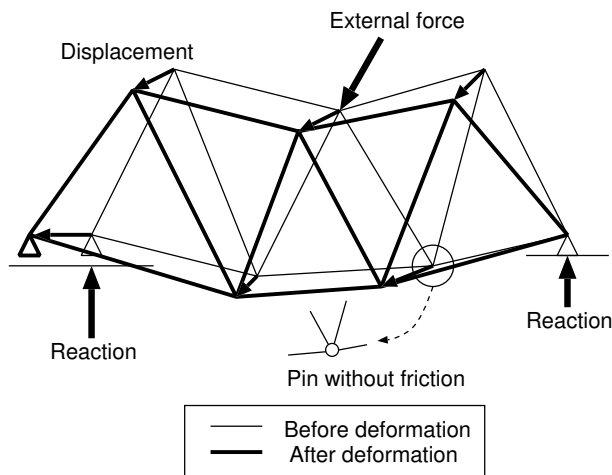


Fig 1.1 トラスの力学

## 1.2 トラスの変形

トラスの変形は各節点における変位 (displacement) を元に表現される。節点  $i$  における変位を  $u_i$  と表そう。なお、ベクトルは文中では太文字で表し、図中では上矢印を付けて表す ( $\vec{u}_i$  など)。以下では、“部材の長さに比べて変位  $u_i$  は十分小さい” と仮定する。これを微小変形の仮定という。

まず、トラスの力学を簡潔な形で記述するために、

$$n_{iI} = \begin{pmatrix} \text{部材 } I \text{ の端 } i \text{ において部材 } I \text{ の軸方向を向いていて、} \\ \text{しかも、部材 } I \text{ から見て外向きな単位ベクトル} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

を定義しておこう。

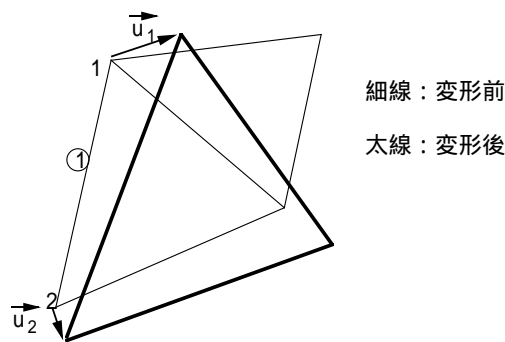


Fig 1.2 トラスの変形

さて、Fig 1.2 における部材 ① ののび  $\delta_{①}$  を求めてみよう。Fig 1.3 に示すように、微小変形の仮定より、変位  $u_1$  と  $u_2$  は小さいから、変形前の部材と変形後の部材は平行であるとみなせる。したがって、部材 ① ののび  $\delta_{①}$  は、式 (1.3) を用いて、

$$\delta_{①} = n_{1①} \cdot u_1 + n_{2①} \cdot u_2 \quad (1.4)$$

となることがわかる (部材番号を数字で書くときには, 節点番号と混同しないようにその数字を  $\textcircled{\phantom{x}}$  で囲んで表す. 以下同様).

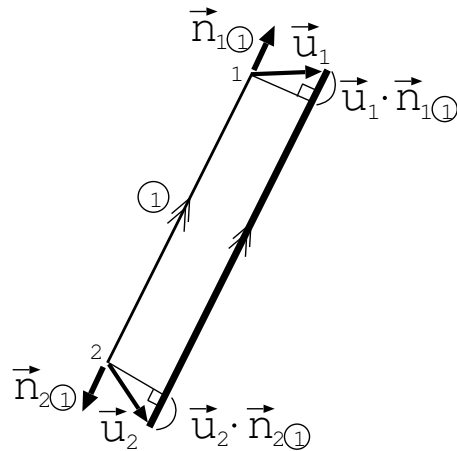


Fig 1.3 変形による節点の変位

式 (1.4) をもう少し厳密な方法で誘導してみよう. ここで,  $n$  を  $n = n_{2\textcircled{1}} (= -n_{1\textcircled{1}})$  と決めておこう. このとき

$$\begin{aligned}
 (\text{変形前の長さ}) &= |nl| = l \\
 (\text{変形後の長さ}) &= |nl + u_2 - u_1| \\
 &= \sqrt{(nl + u_2 - u_1, nl + u_2 - u_1)} \\
 &= \sqrt{l^2 + 2(u_2 - u_1) \cdot nl + (u_2 - u_1) \cdot (u_2 - u_1)}
 \end{aligned}$$

である. ここで,  $|u_1|, |u_2|$  は,  $l$  に比べて十分小さいという微小変形の仮定から,

$$\begin{aligned}
 (\text{変形後の長さ}) &\approx l \sqrt{1 + 2 \frac{(u_2 - u_1) \cdot n}{l}} \\
 &\approx l \left\{ 1 + \frac{(u_2 - u_1) \cdot n}{l} \right\} \\
 &= l + (u_2 - u_1) \cdot n
 \end{aligned}$$

となる. したがって,

$$\delta_{\textcircled{1}} = (u_2 - u_1) \cdot n$$

を得る. これは上で導いた  $\delta_{\textcircled{1}}$  に等しい.

さて, 式 (1.4) から明らかのように, 部材  $I$  ののび  $\delta_I$  は一般的に,

$$\delta_I = \sum_{\substack{i: \text{部材 } I \text{ の} \\ \text{端点}}} n_{iI} \cdot u_i \tag{1.5}$$

と書ける．ここで，上式に含まれる和記号の添字  $i$  の範囲は各部材に応じて変わるので煩わしい．そこで，式 (1.3) で定義した  $n_{iI}$  に次のような規約を新たに設ける．

$$n_{iI} = \begin{cases} n_{iI} & \text{節点 } i \text{ が 部材 } I \text{ の端点のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (1.6)$$

このようにすると，式 (1.5) の和記号の添字  $i$  の範囲はもはや部材  $I$  に集まる端点 (節点) にとどまらず，全節点に渡るとしても同じである (このとき単に  $\sum_i$  と書く)．この規約を用いれば，式 (1.5) は

$$\delta_I = \sum_i n_{iI} \cdot \mathbf{u}_i \quad (1.7)$$

と書ける．式 (1.7) が微小変形理論 (infinitesimal deformation theory) の変位-のび関係を表す式である．一般に，あるトラスについて式 (1.7) を満たすような  $(\mathbf{u}_i, \delta_I)$  の組み合わせを適合系という．

【例題 1】 Fig 1.4 に示すトラスの各部材ののびを求めよ．

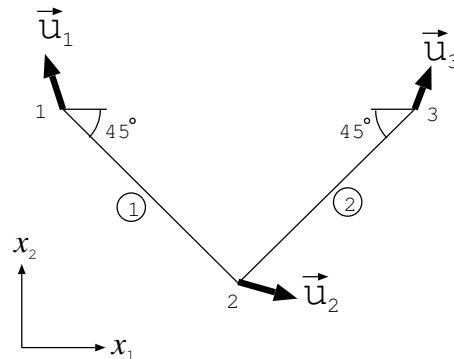


Fig 1.4 トラス

式 (1.7) より次のようになる．

$$\begin{aligned} \delta_{\textcircled{1}} &= n_{1\textcircled{1}} \cdot \mathbf{u}_1 + n_{2\textcircled{1}} \cdot \mathbf{u}_2 \\ &= \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{u_{11}}{\sqrt{2}} + \frac{u_{21}}{\sqrt{2}} + \frac{u_{12}}{\sqrt{2}} - \frac{u_{22}}{\sqrt{2}} \\ \delta_{\textcircled{2}} &= n_{2\textcircled{2}} \cdot \mathbf{u}_2 + n_{3\textcircled{2}} \cdot \mathbf{u}_3 \\ &= \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_2 + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_3 \end{aligned}$$



## 1.3 力のつりあい

### 1.3.1 節点力と部材力

トラスの各部材は部材力  $N$  を受けていると述べた。これは部材がその両節点で受ける力(これを節点力という)の合力(ベクトル)によるものである。その合力は各部材の軸方向にのみ作用するものであり、その大きさを部材力  $N$  (スカラー)と定義するのである。以下に詳しく見てみよう。

さて、部材  $I$  の端点  $i$  に働く節点力を  $f_{iI}$  と表しておき、部材力  $N$  をきちんと定義しよう。注目する部材  $I$  の端点を  $i, j$  とし、それらの位置ベクトルをそれぞれ  $x_i, x_j$  とする。いま、トラスはつりあっているのだから、部材  $I$  の力とモーメントもつりあっていなければならない。これより、

$$\begin{aligned} f_{iI} + f_{jI} &= 0 \\ x_i \times f_{iI} + x_j \times f_{jI} &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。第一式から、 $f_{iI}$  と  $f_{jI}$  は大きさが等しくて逆向きなベクトルであることがわかる。また、第一式を第二式に代入すると、

$$(x_j - x_i) \times f_{jI} = 0$$

と書けるから、 $x_j - x_i \neq 0$  であることを用いれば、 $f_{jI} \neq 0$  ならば  $x_j - x_i$  と  $f_{jI} (= -f_{iI})$  は平行でなくてはならない( $f_{jI} = 0$  でも下記は成り立つ)。つまり、 $f_{iI}$  と  $f_{jI}$  はともに軸に平行に作用していることがわかる。つまり、 $f_{iI}$  と  $f_{jI}$  は軸に平行な大きさの等しい互いに逆向きなベクトルである。したがって、 $f_{iI}$  と  $f_{jI}$  は式(1.3)で定義した単位ベクトルを用いれば、

$$f_{iI} = n_{iI} N_I \tag{1.8}$$

と書けることがわかるであろう。 $N_I$  は部材  $I$  の部材力に他ならない。 $N_I$  が正のとき、 $f_{iI}$  と  $f_{jI}$  は互いに部材  $I$  から見て外向きとなり(物理的には引張)、 $N_I$  の符号は引張が正となっていることがわかる。例えば、Fig 1.5 の部材 1 の場合は、

$$f_{2①} = n_{2①} N_{①}, \quad f_{1①} = n_{1①} N_{①}$$

と書ける。

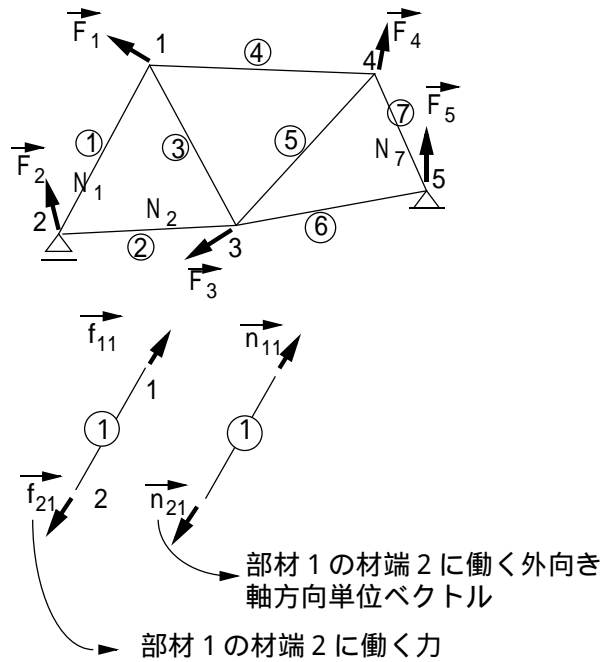


Fig 1.5 部材 1 の材端に働く節点力

### 1.3.2 力のつりあい

トラスの節点に着目して力のつりあい式を誘導してみよう．約束として，トラスのある節点  $i$  に作用する外荷重を  $F_i$  と表し，その  $x_1, x_2$  成分をそれぞれ  $F_{1i}, F_{2i}$  と表す．

一般的な表現を述べる前に，Fig 1.5 の節点 1 における力のつりあいを書き下してみる．注目している節点 1 に接合している部材は ①，③，④ である (Fig 1.6) ．

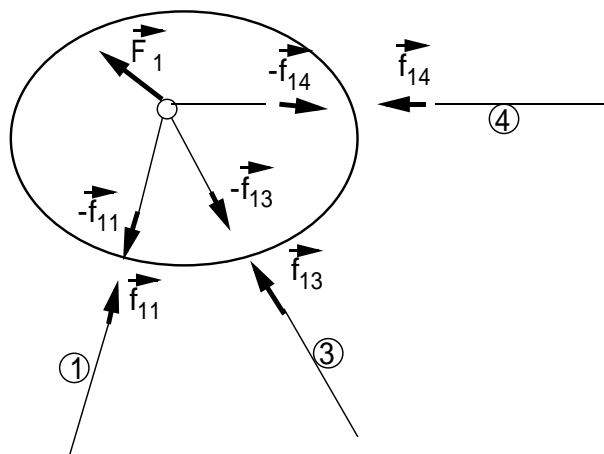


Fig 1.6 節点 1 の力のつりあい

これらの部材の節点 1 における節点力は，それぞれ  $f_{1①}, f_{1③}, f_{1④}$  である．したがって，作用反作用の法則により，節点 1 は力  $-f_{1①}, -f_{1③}, -f_{1④}$  を受けることになる．これら

の他に，外力として  $F_1$  を受けているから，節点 1 に関する力のつりあい式は，

$$F_1 + (-f_{1(1)}) + (-f_{1(3)}) + (-f_{1(4)}) = 0$$

である．これをもう少しシンボリックに表すと，

$$F_1 = \sum_{I: \text{節点 1 に 集まる部材}} f_{1I} = \sum_{I: \text{節点 1 に 集まる部材}} n_{1I} N_I$$

となる．最後の等式には式 (1.8) を用いていることに注意されたい．

上式を一般化すると，節点  $i$  に関する力のつりあいは

$$F_i = \sum_{I: \text{節点 } i \text{ に 集まる部材}} n_{iI} N_I$$

と書けることがわかるであろう．さらに，式 (1.6) の規約を用いれば，

$$F_i = \sum_I n_{iI} N_I \tag{1.9}$$

と表現できる．これがトラスに関するつりあい式である．一般に，あるトラスに対して式 (1.9) を満たす  $(F_i, N_I)$  の組合せをつりあい系と呼ぶ．

【例題 2】 Fig 1.7 に示すトラスのつりあい式を書け．

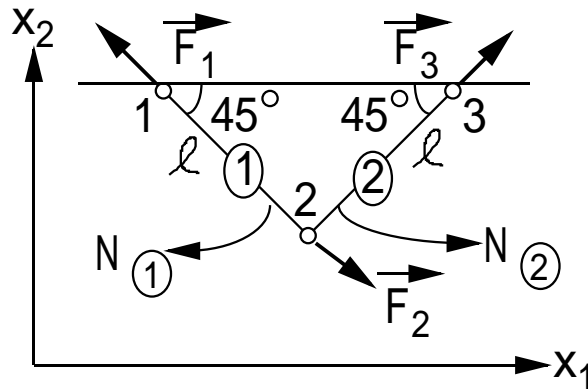


Fig 1.7 2つの部材からなる静定トラス

式 (1.9) より次のようになる．

$$F_1 = n_{1(1)} N_{(1)} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} N_{(1)}$$

$$F_3 = n_{3(2)} N_{(2)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} N_{(2)}$$

$$F_2 = n_{2(1)} N_{(1)} + n_{2(2)} N_{(2)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} N_{(1)} + \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} N_{(2)}$$

## 1.4 トラスの境界条件

トラスの各節点では，外力  $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$  と変位  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  の合計四つのうち二つが境界条件 (boundary condition, 略して B.C.) として与えられていなくてはならない．

【例題 3】 Fig 1.8 のトラスの境界条件を書き下せ．

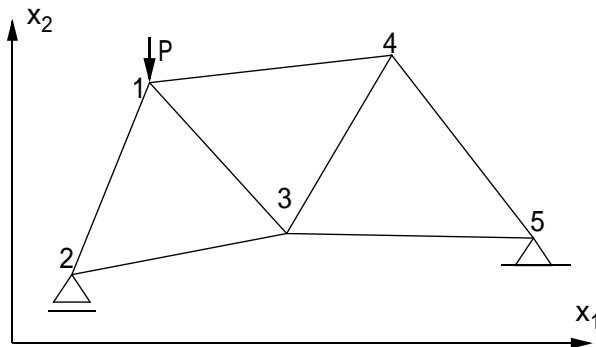


Fig 1.8 境界条件

節点 1 :	$F_{11} = 0,$	$F_{21} = -P$	$(u_{11} = \text{未知},$	$u_{21} = \text{未知})$
節点 2 :	$F_{12} = 0,$	$u_{22} = 0$	$(F_{22} = \text{未知},$	$u_{12} = \text{未知})$
節点 3 :	$F_{13} = 0,$	$F_{23} = 0$	$(u_{13} = \text{未知},$	$u_{23} = \text{未知})$
節点 4 :	$F_{14} = 0,$	$F_{24} = 0$	$(u_{14} = \text{未知},$	$u_{24} = \text{未知})$
節点 5 :	$u_{15} = 0,$	$u_{25} = 0$	$(F_{15} = \text{未知},$	$F_{25} = \text{未知})$

節点 1, 3, 4 では力の境界条件が，節点 5 では変位の境界条件が与えられ，節点 2 では両者の境界条件が与えられている．なお，節点 3, 4 は，外力が 0 として与えられているということに注意されたい．

## 1.5 トラスの問題を解く事の意味

そもそも“トラスの問題を解く”とはどういうことなのかを明らかにしておこう．トラスの問題を解くとは，

1. 力については，つりあい系であって，力に関する境界条件を満たす．
2. 変形については，適合系であって，変位に関する境界条件を満たす．
3. 部材力と伸びについては，構成関係を満たす．

の全てを満たす  $F, N, u, \delta$  を求める事，である．ここで，次の二つの用語を定義しておく．

- 上記 1. のような  $(F, N)$  を, 静力学的に許容 (statically admissible, 略して S.A.) という.
- 上記 2. のような  $(u, \delta)$  を, 幾何学的に許容 (kinematically admissible, 略して K.A.) という.

この二つの用語は以下で頻繁に用いるので, よく噛みしめておいてほしい.

【例題 4】 Fig 1.9 に示すトラスの静力学的に許容な部材力  $N$  を求めよ.

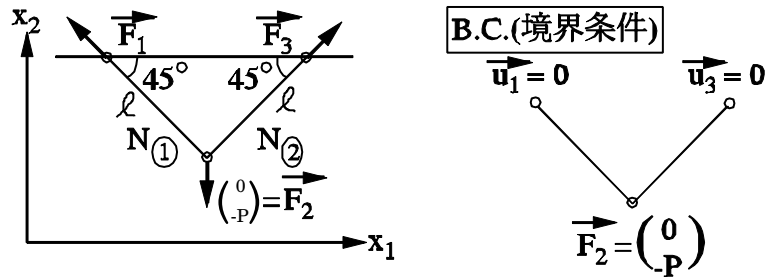


Fig 1.9 静定トラス

力の境界条件が与えられているのは節点 2 のみであるから, まず, これに着目してつりあい式を求める. すなわち,

$$\mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} N_{\textcircled{1}} + \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} N_{\textcircled{2}}$$

である. あとは境界条件を満足させればよい. 便宜上, 上の式を行列で表現して, 境界条件  $(F_{12}, F_{22}) = (0, -P)$  を考慮すると,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{\textcircled{1}} \\ N_{\textcircled{2}} \end{pmatrix}$$

となる. これを解けば,

$$\begin{pmatrix} N_{\textcircled{1}} \\ N_{\textcircled{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P/\sqrt{2} \\ P/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

となる. こうして, 静力学的に許容な部材力が求められた.

例題 4 からわかるように, “静力学的に許容な部材力を求める” ということは, “トラスの部材力を力のつりあいから求める” ということである.

例題 4 では, 力のつりあいだけから部材力が唯一に定まった. これはこのトラスが静定構造であるためである. 一般に, “静定構造 (トラス) とは静力学的に許容な部材力が一意である構造 (トラス)” である. 他方, 次に示す例題 5 は不静定構造 (トラス) の場合である. “不静定構造 (トラス) とは静力学的に許容な部材力が一意でない構造 (トラス)” である, ということがわかるであろう.

【例題 5】 Fig 1.10 に示すトラスの静力学的に許容な部材力  $N$  を求めよ。

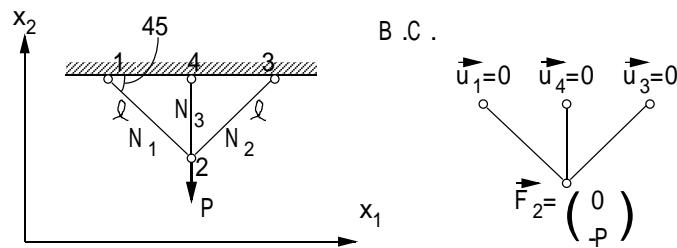


Fig 1.10 不静定トラス

力の境界条件が与えられているのは節点 2 だけである。まず、この節点に関する力のつりあい式を立てて、それに力の境界条件  $(F_{12}, F_{22}) = (0, -P)$  を考慮すれば、静力学的に許容な部材力が求められる。すなわち、

$$\mathbf{F}_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{n}_2(1)} N_{(1)} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{n}_2(2)} N_{(2)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{n}_2(3)} N_{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix}$$

である。この関係を満たす  $(\mathbf{F}, N)$  が静力学的に許容である。ここで、未知数が 1 つ含まれていることに注意されたい。この未知数を不静定力といい、不静定次数は 1 であるという。このようなトラスを 1 次の不静定トラスという。一般に、“静力学的に許容な  $(\mathbf{F}, N)$  が含む独立な未知数の数は不静定次数に等しい”と言える。

後々の都合上、 $N_{(3)}$  を未知数のままとし、 $N_{(1)}$  と  $N_{(2)}$  を求めておこう。すなわち、

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{(1)} \\ N_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -P + N_{(3)} \end{pmatrix}$$

を解くことにより、

$$\begin{pmatrix} N_{(1)} \\ N_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P - N_{(3)})/\sqrt{2} \\ (P - N_{(3)})/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

となる。

次に、幾何学的に許容な  $(\mathbf{u}, \delta)$  を求めてみよう。

【例題 6】 Fig 1.9 のトラスについて、幾何学的に許容な  $(\mathbf{u}, \delta)$  を求めよ。

適合系であるためには，各部材が式 (1.7) の関係，すなわち

$$\delta_I = \sum_i \mathbf{n}_{iI} \cdot \mathbf{u}_i$$

を満足しなくてはならない．つまり，

$$\begin{aligned} \delta_{\textcircled{1}} &= \mathbf{n}_{1\textcircled{1}} \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{n}_{2\textcircled{1}} \cdot \mathbf{u}_2 \\ \delta_{\textcircled{2}} &= \mathbf{n}_{2\textcircled{2}} \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{n}_{3\textcircled{2}} \cdot \mathbf{u}_3 \end{aligned}$$

でなくてはならない．幾何学的に許容であるためには，変位の境界条件  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$  を満足させればよい．したがって，これらを上式に代入すれば，

$$\begin{pmatrix} \delta_{\textcircled{1}} \\ \delta_{\textcircled{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix}$$

が幾何学的に許容なのびである．

さらに計算を進めて， $\mathbf{u}_2$  を求めてみよう． $\delta_{\textcircled{1}}$  と  $\delta_{\textcircled{2}}$  は，例題 4 で求めた部材力  $N_{\textcircled{1}}$  と  $N_{\textcircled{2}}$  からそれぞれ，

$$\delta_{\textcircled{1}} = \delta_{\textcircled{2}} = \frac{P\ell}{\sqrt{2}AE}$$

と計算されるので，

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -P\ell/AE \end{pmatrix}$$

と求まる．

## 1.6 仮想仕事の原理

定理 仮想仕事の原理 (Principle of virtual work) : あるトラスについて， $(\mathbf{F}_i^*, N_I^*)$  がつりあい系であって， $(\mathbf{u}_i, \delta_I)$  が適合系であるとする．このとき，次式が成り立つ．

$$\sum_i \mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{u}_i = \sum_I N_I^* \delta_I \quad (1.10)$$

ここで， $(\mathbf{F}^*, N^*)$  と  $(\mathbf{u}, \delta)$  との間には，同一のトラスを対象としているという点を除いて，関係がある必要はないことに注意されたい．さて，証明を与えよう．

[証明] つりあい系  $(\mathbf{F}^*, N^*)$  が式 (1.9) を満足し，適合系  $(\mathbf{u}, \delta)$  が式 (1.7) を満足することを用いれば以下のように証明される．

$$\text{左辺} = \sum_i \mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{u}_i = \sum_i \left( \sum_I \mathbf{n}_{iI} N_I^* \right) \cdot \mathbf{u}_i = \sum_I N_I^* \left( \sum_i \mathbf{n}_{iI} \cdot \mathbf{u}_i \right) = \sum_I N_I^* \delta_I = \text{右辺}$$

[証明終]

## 1.7 仮想仕事の応用

仮想仕事の原理を応用してみよう。本講義では、

- 変位を求める (単位荷重法)
- 不静定トラスを解く

という二つの事項への応用について触れたい。これらは応力法の話である。さて、構造物の解析法は大別して、応力法と変位法に分けられる。両者の特徴を大雑把に言えば次の通りである。

- 応力法

力を未知数とする方法である。静力学的に許容な  $(F, N)$  が容易に求められることを前提とする。この意味で、手計算に向いている方法といえる。静定構造の場合は静力学的に許容な系には未知数が存在しない。不静定構造の場合は、未知数の数は不静定次数に一致する。

- 変位法

変位を未知数とする方法である。静定構造でも未知数が存在する。したがって、手計算には不向きであって、計算機向きである。現在はほとんどこの方法で解く。

### 1.7.1 単位荷重法による変位の求め方 (静定トラスの場合)

一つ目の目的である変位を求める方法について述べよう。この方法は単位荷重法と呼ばれている。後の節 (1.7.3 節) でも述べるように、不静定構造にも単位荷重法を適用できる。とりあえず本節では、静定構造の場合だけを考える。その一般的な手順は次の通りである。

1. 与えられた荷重の下で真の部材力を決定する (静定なので全て求まる)。
2. 1. で求めた部材力に構成式を用いて部材ののびを求める。これと節点の変位を合わせた系は幾何学的に許容でなければならない (適合系  $(u, \delta)$  をなさなければならない)。
3. 変位を求めたい点に、求めたい方向へ大きさ 1 の荷重を作用させた時のつりあい系をつくる (これを  $(F^*, N^*)$  とする)。
4. 3. の  $(F^*, N^*)$  をつりあい系とし、2. の  $(u, \delta)$  を適合系として仮想仕事を書き下す。

さて、具体的な例をみてみよう。

【例題 7】 Fig 1.11 のトラスについて、荷重点の下向きの変位を求めよ。



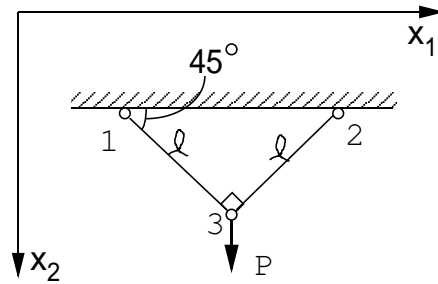


Fig 1.11 静定トラス (Young 率  $E$ , 断面積  $A$ )

1. 力のつりあいと力の境界条件から真の部材力を求める (Fig 1.12) . もちろん, このようにして求めた部材力は静力学的に許容である (具体的な計算は例題 4 を見られたい) .

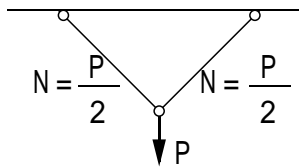


Fig 1.12

2. 構成関係 (式 (1.2) の  $\delta = Nl/AE$ ) によって, のびが  $\delta_1 = \delta_2 = \frac{P\ell}{\sqrt{2}AE}$  と求まる (Fig 1.13) .

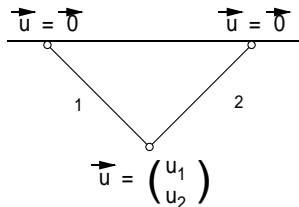


Fig 1.13

3. 求めたい節点 3 に, 求めたい方向  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  に大きさ 1 の荷重  $F^*$  を加えたときのつりあい系を仮想のつりあい系とすればよい. これは, 1. で求めた静力学的に許容な真の部材力を利用して Fig 1.14 のように決定できる .

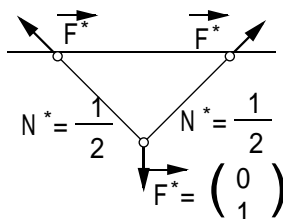


Fig 1.14

4. 2. で求めたのびが正解であるためには，そののびと節点変位とを合わせた系が適合系をなさなければならない(既に変位の境界条件は満足させているから，幾何学的に許容でなければならない，と言ってもよい) ことから，3. の仮想のつりあい系との間に仮想仕事の原理が成立しなくてはならない．したがって，

$$\sum_i \mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{u}_i = \sum_I N_I^* \delta_I$$

$$\underbrace{0}_{\text{節点 1}} + \underbrace{0}_{\text{節点 2}} + \underbrace{u_2}_{\text{節点 3}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{P\ell}{\sqrt{2}AE}}_{\substack{N^* \\ \text{左の部材}}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{P\ell}{\sqrt{2}AE}}_{\substack{N^* \\ \text{右の部材}}}$$

$$u_2 = \frac{P\ell}{AE}$$

【例題 8】 Fig 1.15 の荷重点の変位を求めよ．

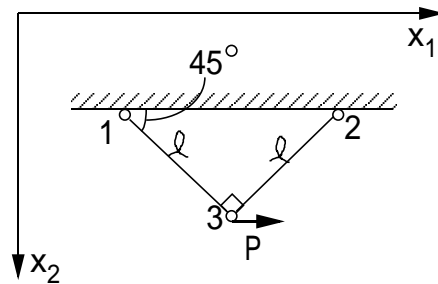


Fig 1.15 静定トラス (Young 率  $E$  , 断面積  $A$ )

1. 真の部材力を求める (Fig 1.16) .

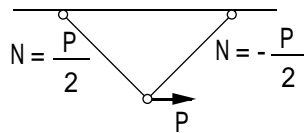


Fig 1.16

2. 構成関係よりのびを求めると， $\delta_1 = \frac{P\ell}{\sqrt{2}AE}$  ,  $\delta_2 = -\frac{P\ell}{\sqrt{2}AE}$  となる (Fig 1.17) . これと節点変位は適合系をなさなければならない．

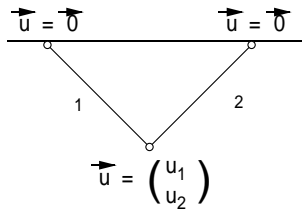


Fig 1.17

3. 仮想のつりあい系を決定する .

- $x_1$  成分を求める場合 (Fig 1.18 )

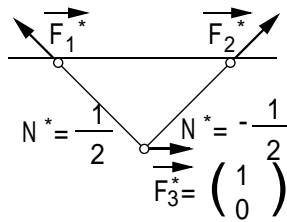


Fig 1.18

- $x_2$  成分を求める場合 (Fig 1.19 )

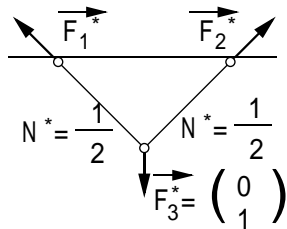


Fig 1.19

4. 2. の適合系と 3. のつりあい系に仮想仕事の原理を適用する .

$$\sum_i \mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{u}_i = \sum_I N_I^* \delta_I$$

- $x_1$  成分を求める場合

$$\underbrace{0}_{\text{節点 1}} + \underbrace{0}_{\text{節点 2}} + \underbrace{u_1}_{\text{節点 3}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{Pl}{\sqrt{2}AE}}_{\text{左の部材}} + \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(-\frac{Pl}{\sqrt{2}AE}\right)}_{\text{右の部材}}$$

$$u_1 = \frac{Pl}{AE}$$

- $x_2$  成分を求める場合

$$\underbrace{0}_{\text{節点 1}} + \underbrace{0}_{\text{節点 2}} + \underbrace{u_2}_{\text{節点 3}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{Pl}{\sqrt{2}AE}}_{\substack{N^* \\ \text{左の部材}}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{Pl}{\sqrt{2}AE} \right)}_{\substack{N^* \\ \text{右の部材}}}$$

$$u_2 = 0$$

【例題 9】 Fig 1.20 のトラスについて，節点 1 の 2 つの変位成分を求めよ．

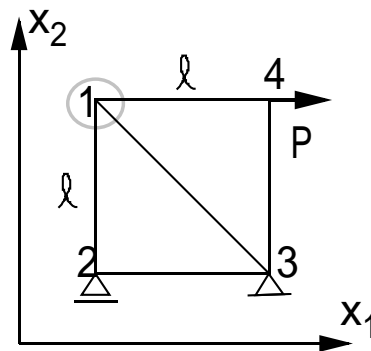


Fig 1.20 静定トラス (Young 率  $E$ ，断面積  $A$ )

1. 真の部材力を求める (Fig 1.21) .

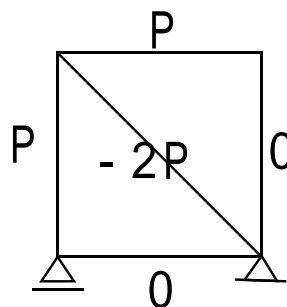


Fig 1.21

2. 構成関係よりのびを求める (Fig 1.22) . これと節点変位は適合系をなさなければならない .

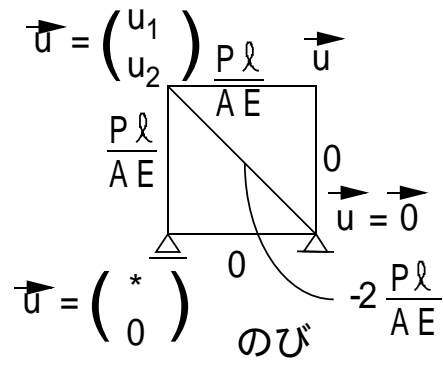


Fig 1.22

3. 仮想のつりあい系を決定する .

- $x_1$  成分を求める場合 (Fig 1.23) .

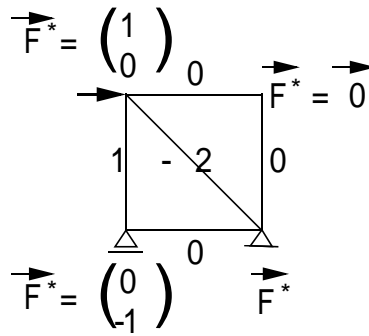


Fig 1.23

- $x_2$  成分を求める場合 (Fig 1.24) .

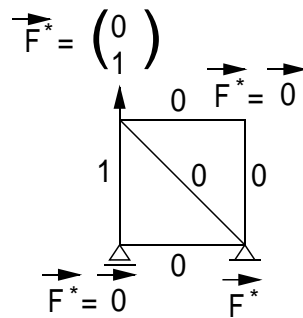


Fig 1.24

4. 2. の適合系と 3. のつりあい系に仮想仕事の原理を適用する .

$$\sum_i \mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{u}_i = \sum_I N_I^* \delta_I$$

- $x_1$  成分を求める場合

$$u_1 + 0 + 0 + 0 = 1 \times \frac{P\ell}{AE} + 0 \times \frac{P\ell}{AE} + 0 \times 0 + (-\sqrt{2}) \times \left(-\frac{2P\ell}{AE}\right) + 0 \times 0$$

$$u_1 = (1 + 2\sqrt{2}) \frac{P\ell}{AE}$$

- $x_2$  成分を求める場合

$$\dots = \dots$$

$$u_2 = 1 \frac{P\ell}{AE}$$

【例題 10】 Fig 1.25 のトラスについて，右上の節点が  $\Delta$  だけ変位したときの点 A の  $x_2$  方向の変位を求めよ．

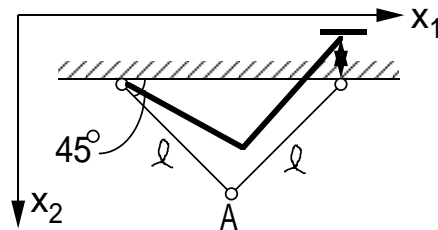


Fig 1.25 Young 率  $E$ ，断面積  $A$

1. 真の部材力を求める (Fig 1.26) .

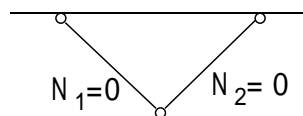


Fig 1.26

2. 構成式と変位に関する境界条件よりのびを求める (Fig 1.27) .

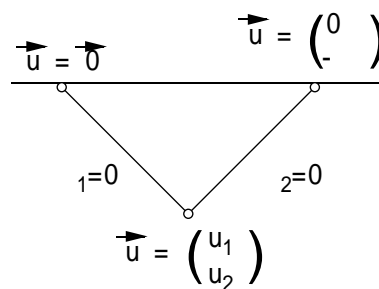


Fig 1.27

3. 仮想のつりあい系を決定する (Fig 1.28) .

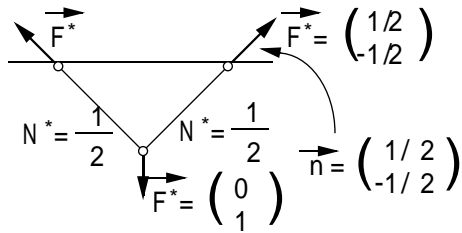


Fig 1.28

4. 2. の適合系と 3. のつりあい系に仮想仕事の原理を適用する .

$$\sum_i \mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{u}_i = \sum_I N_I^* \delta_I$$

$$0 + u_2 + \Delta/2 = 0$$

$$u_2 = -\frac{\Delta}{2}$$

【例題 11】 Fig 1.29 のトラスの右側の部材の温度が  $\Delta t$  だけ上昇した時の点 A の  $x_1$  方向の変位を求めよ .

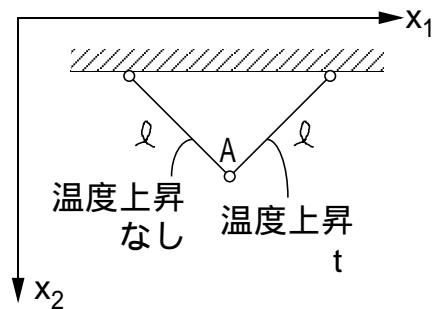


Fig 1.29 断面積  $A$  , Young 率  $E$  , 線膨張率  $\alpha$

1. 真の部材力を求める (Fig 1.30) .

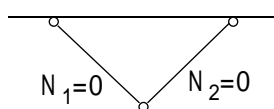


Fig 1.30

2. 構成関係と変位に関する境界条件よりのびを求める．ここで，構成式は  $\delta = \frac{Nl}{AE} + \delta_0$  であつて， $\delta_0$  が温度の影響を表している．線膨張率が  $\alpha$ ，温度上昇が  $\delta t$  の場合には， $\delta_0 = \Delta t \alpha l$  と書ける．したがって，次のようにのびが求まる (Fig 1.31) ．

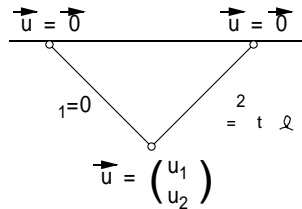


Fig 1.31

3. 仮想のつりあい系を決定する (Fig 1.32) ．

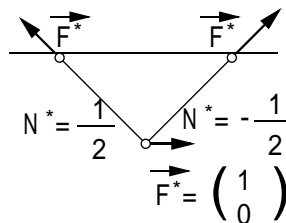


Fig 1.32

4. 2. の適合系と 3. のつりあい系に仮想仕事の原理を適用する ．

$$\sum_i \mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{u}_i = \sum_I N_I^* \delta_I$$

$$0 + 0 + u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Delta t \alpha l$$

$$u_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Delta t \alpha l$$

## 1.7.2 不静定トラスの解法

仮想仕事の第二の応用として，不静定トラスの解法について述べる．その手順は以下の様である．

1. 与えられた荷重の下に，静力学的に許容なつりあい系を求める．このとき，部材力が未知の不静定力を含んだ形で書かれる．



2. 1. で求められた部材力に構成関係を用いて部材ののびを計算する．これと節点変位を合わせたもの  $(u, \delta)$  は幾何学的に許容でなければならない．
  3. 外荷重が 0 のつりあい系を作り， $(F^*, N^*)$  とする．
  4. 3. の  $(F^*, N^*)$  と 2. の  $(u, \delta)$  との間に仮想仕事の原理を書き下すと不静定力が求まる．
- 一般に，3. の  $(F^*, N^*)$  の系は不静定次数個だけ独立にとることができる．このことから，全ての不静定力を求めることができる．

【例題 12】 Fig 1.33 のトラスの部材力を決定せよ．

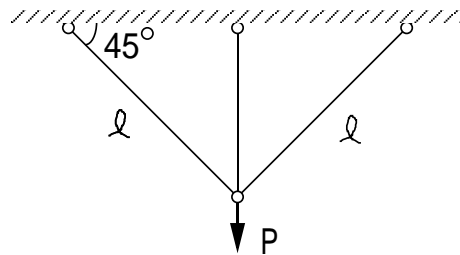


Fig 1.33 断面積  $A$  , Young 率  $E$

1. 静力学的に許容な真のつりあい系を求める．すなわち，荷重の与えられた中央の節点におけるつりあい式を立てる．ここでは，中央の部材の部材力を不静定力として，それを  $n$  と表す (Fig 1.34) ．

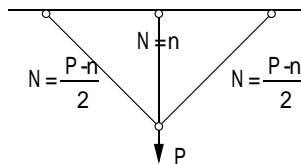


Fig 1.34

2. 1. の部材力と構成関係より，部材ののびを求める (Fig 1.35) ．

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{(P - n)\ell}{\sqrt{2}AE}, \quad \delta_3 = \frac{n\ell}{\sqrt{2}AE}$$

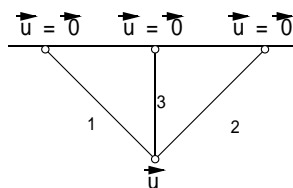


Fig 1.35

3. 外荷重  $P$  を 0 とした時の仮想のつりあい系をつくる．これは 1. で求めた真のつりあい系に対して， $P = 0, n = 1$  とすればよい (Fig 1.36) ．

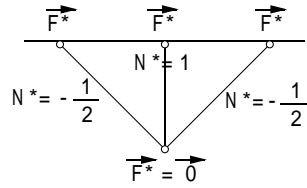


Fig 1.36

4. 2. で求めた  $\delta$  が適合系ならば，任意のつりあい系 ( $F^*, N^*$ ) との間に仮想仕事が成立しなければならない．したがって，3. で求めた ( $F^*, N^*$ ) を荷重が 0 のつりあい系に選んで仮想仕事を適用すれば，不静定力が求まる．

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{u}_i &= \sum_I N_I^* \delta_I \\ \text{右辺} &= 0 \\ \text{左辺} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \frac{(P-n)\ell}{\sqrt{2}AE} \times 2 + 1 \times \frac{n\ell}{\sqrt{2}AE} = \frac{(n-P)\ell}{AE} + \frac{n\ell}{\sqrt{2}AE} \\ n &= \frac{P}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

【例題 13】 Fig 1.37 のトラスの部材力を決定せよ．

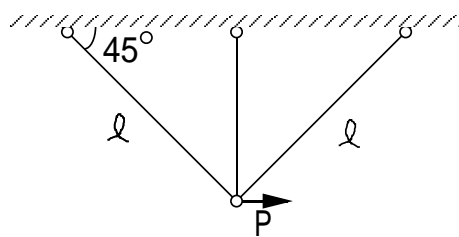


Fig 1.37 断面積  $A$  , Young 率  $E$

1. 部材力を決定する．ここでは，中央の部材の部材力を不静定力  $n$  とする (Fig 1.38) ．

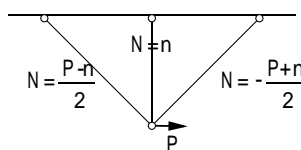


Fig 1.38

2. 1. の部材力と構成関係よりのびを求める (Fig 1.39) .

$$\delta_1 = \frac{(P-n)\ell}{\sqrt{2}AE}, \quad \delta_2 = -\frac{(P+n)\ell}{\sqrt{2}AE}, \quad \delta_3 = \frac{n\ell}{\sqrt{2}AE}$$

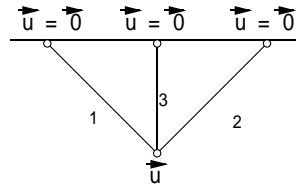


Fig 1.39

3. 外荷重を 0 として，仮想のつりあい系を一つ決定する (Fig 1.40) .

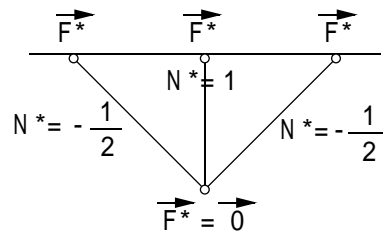


Fig 1.40

4. 2. の適合系と 3. のつりあい系に仮想仕事を適用する .

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{u}_i &= \sum_I N_I^* \delta_I \\ \text{左辺} &= 0 \\ \text{右辺} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \left(\frac{(P-n)\ell}{\sqrt{2}AE}\right) + 1 \times \frac{n\ell}{\sqrt{2}AE} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \left(-\frac{(P+n)\ell}{\sqrt{2}AE}\right) \\ n &= 0 \end{aligned}$$

なお， $n = 0$  は明らかである．実際，トラスを紙面の裏側から見ることにより  $P$  が左向きに作用した時の中央の部材の部材力も  $n$  であることがわかるが，一方， $P$  が左向きに作用することは右向きに  $(-P)$  作用するということであるので，問題の線形性から中央の部材の部材力は  $(-n)$  でなければならない．よって， $n = -n$  より  $n = 0$  となる．

### 1.7.3 単位荷重法による変位の求め方 (不静定トラスの場合)

単位荷重法は不静定トラスであっても用いることができる．実際，静定トラスの場合には部材力が力のつりあいだけから求められるというだけで，不静定トラスにおいても部材力を求めた後ならば，静定トラスの場合と同様な手順で単位荷重法を適用できる．ただし，仮想のつりあい系を計算の手間を減らすように“上手に”選んでやるのが肝心となる．不静定トラスの場合の単位荷重法の手順は以下の通りである．

1. 不静定構造を解いて，不静定力を決定する．これより真の部材力が求まる．
2. 真の部材力に構成関係を用いて真ののびを決定する．
3. 変位を求めたい点に，求めたい方向へ大きさ 1 の荷重をかけた時の静力学的に許容な部材力を求める (これが仮想のつりあい系)．
4. 上記 1. と 2. に仮想仕事を使う．

【例題 14】 Fig 1.41 のトラスの荷重点の  $x_2$  方向の変位を決定せよ．

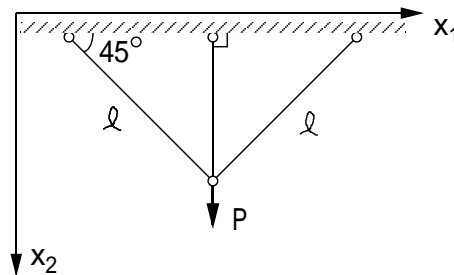


Fig 1.41 断面積  $A$  , Young 率  $E$

1. 真の部材力を決定する．これは前の例題のように求めればよい (Fig 1.42) ．

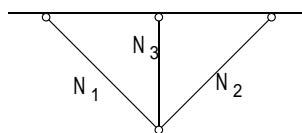


Fig 1.42

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}, \quad N_3 = \frac{\sqrt{2}P}{1 + \sqrt{2}}$$

2. 1. の部材力と構成関係よりのびを求める (Fig 1.43) ．

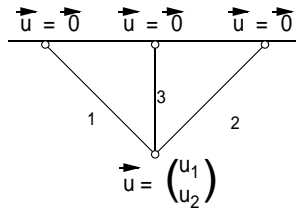


Fig 1.43

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{Pl}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})AE}, \quad \delta_3 = \frac{Pl}{(1+\sqrt{2})AE}$$

3.& 4. 仮想のつりあい系をつくり，仮想仕事を適用する．

• おろかなつくり方

これまでに習って，1. で求めた真の部材力を用いて， $P = 1$  とすることにより，

$$N_1^* = N_2^* = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}, \quad N_3^* = \frac{\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})}$$

という“適合条件”も満たすつりあい系を，仮想のつりあい系として採用してみる (Fig 1.44) ．

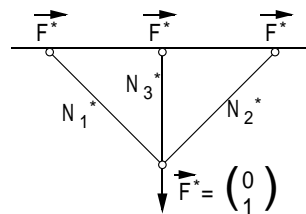


Fig 1.44

仮想仕事を適用すると，

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{u}_i &= \sum_I N_I^* \delta_I \\ \text{左辺} &= 0 + 0 + 0 + u_2 \\ \text{右辺} &= \frac{Pl}{(\sqrt{2})^2 (1+\sqrt{2})^2 AE} \times 2 + \frac{Pl}{(1+\sqrt{2})AE} \times \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \\ u_2 &= \frac{Pl}{(1+\sqrt{2})AE} \end{aligned}$$

となり，(もちろん) 解を求めることはできるが，この計算は煩わしいことがわかると思う．

- 上手な作り方

実は，仮想のつりあい系としては，変位を求めたい節点に求めたい方向に大きさ 1 の荷重を作用させた時のつりあい系であればよく，できるだけ簡単なものを用いればよい．上のように，“適合条件を満たしている必要はない”のである．ここでは，先ほどの例題を利用して， $P = 1, n = 1$  としたつりあい系を仮想のつりあい系として取るのが簡単であろう (Fig 1.45) ．

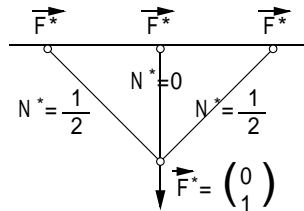


Fig 1.45

もちろん，上の系はつりあっているが，適合条件は満たしていない．しかし，仮想仕事の原理を適用するにあたっては問題にならないということをもう一度注意しておく．さて，仮想仕事を適用しよう．

$$\sum_i \mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{u}_i = \sum_I N_I^* \delta_I$$

$$\text{左辺} = u_2$$

$$\text{右辺} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left\{ \frac{P\ell}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})AE} \right\} \times 2$$

$$u_2 = \frac{P\ell}{(1+\sqrt{2})AE}$$

実際に手を動かしてみれば，だいぶ計算が“ラク”になったことがわかっていただけるであろう．なお，この問題の場合は， $n = 1$  として，中央の部材のみ  $N^* = 1$ ，左右の部材は  $N^* = 0$  のつりあい系を採用することもできる (試してみよう) ．

上の例題より，不静定トラスに対して単位荷重法を適用するにあたっては，計算が楽になるような仮想つりあい系を求めることが大切であることがわかったと思う．そこで，その求め方の一つの“方針”を示そう．

- 不静定構造の解析をする必要はない．単につりあいを満たす仮想のつりあい系を一つ決定すればよい．
- トラスの部材をいくつか (不静定次数の数だけ) 取って静定構造を得，これに単位荷重を作用させた時の部材力を仮想つりあい系として用いるとよい．

ここで、不静定次数の求め方について述べておく。既に習ったように、不静定次数は計算によって求めることができるが、次のように直観的な求め方を知っておくのは重要であろう。次のような不静定トラスを考える。もちろん、不静定次数は 1 が正解である (Fig 1.46)。

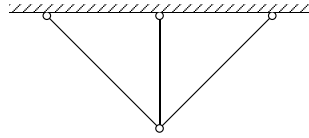


Fig 1.46 元のトラス (安定)

まず、中央の部材を 1 本取ってみると、Fig 1.47 のようになるが、このトラスも安定である (もちろん、中央の部材の代わりに左右どちらかの部材を 1 本取ってもよい)。続いて、もう 1 本の部材を取ってみると、Fig 1.48 のようになって不安定となる。つまり、構造が安定であるためには少なくとも 2 本の部材が必要であることがわかる (左右どちらかの部材を取っても同じ)。不静定次数とは、元のトラスの部材の本数 (3 本) から、ギリギリ安定なトラスの部材の本数 (2 本) を引いた数である。つまり、元のトラスの不静定次数は 1 である。

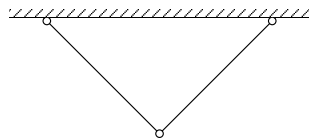


Fig 1.47 1 本取ったトラス (安定)

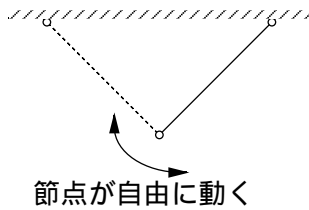


Fig 1.48 2 本取ったトラス (不安定)

さて、例題を一つ示そう。

【例題 15】 Fig 1.49 のトラスの部材力を決定し、さらに点 A の  $x_2$  方向の変位を求めよ。

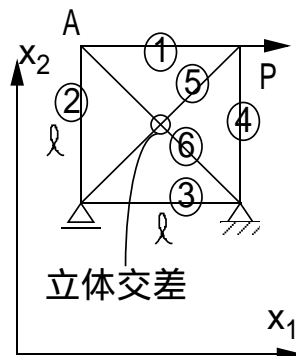


Fig 1.49 断面積  $A$  , Young 率  $E$

1. 真の部材力を求める．上辺の部材力を不静定力  $n$  とする (Fig 1.50) .

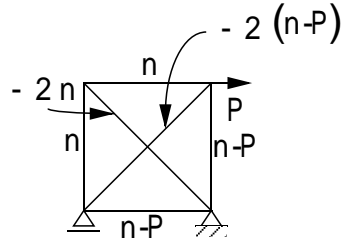


Fig 1.50

続いて，真の部材力に構成式を用いてのびを求める (Fig 1.51) .

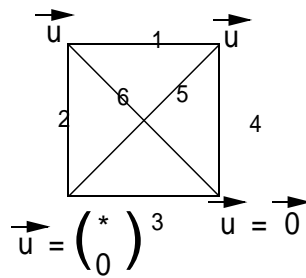


Fig 1.51

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{n\ell}{AE}, \quad \delta_3 = \delta_4 = \frac{(n-P)\ell}{AE}, \quad \delta_5 = -\frac{2(n-P)\ell}{AE}, \quad \delta_6 = -\frac{2n\ell}{AE}$$

一方，仮想のつりあい系をつくる (Fig 1.52) .

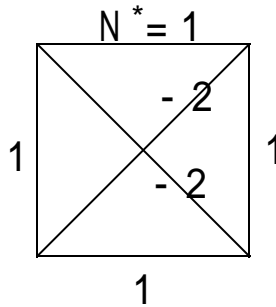


Fig 1.52



以上に仮想仕事を適用すれば，不静定力  $n$  が求まる．

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{u}_i &= \sum_I N_I^* \delta_I \\ \text{左辺} &= 0 \\ \text{右辺} &= \underbrace{1 \times \frac{n\ell}{AE} \times 2}_{\text{部材 1,2}} + \underbrace{1 \times \frac{(n-P)\ell}{AE} \times 2}_{\text{部材 3,4}} \\ &\quad + \underbrace{(-\sqrt{2}) \left\{ -\frac{2(n-P)\ell}{AE} \right\}}_{\text{部材 5}} + \underbrace{(-\sqrt{2}) \times \left\{ -\frac{2n\ell}{AE} \right\}}_{\text{部材 6}} \\ n &= \frac{P}{2} \end{aligned}$$

2. 1. で求められた不静定力  $n$  を用いて，真ののびを計算する．

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{P\ell}{2AE}, \quad \delta_3 = \delta_4 = -\frac{P\ell}{2AE}, \quad \delta_5 = \frac{P\ell}{AE}, \quad \delta_6 = -\frac{P\ell}{AE}$$

3. 点 A に  $x_2$  方向へ大きさ 1 の単位荷重を与えた時の仮想のつりあい系をつくる．このためには，上で述べた方針に従い，部材を一本ずつ取って静定なトラスをまず得てみよう．ここでは荷重点に参与している斜めの部材を取り除くのがよさそうである．この一本を取り除いて得られる静定トラス(もう一本取ると不安定!)のつりあい系をつくり，これを仮想のつりあい系とする．そのつりあい系とは，左上の節点のつりあいから明らかのように，左端の部材の部材力は 1 で，それ以外は 0 であるものである(除外した部材の部材力も 0 となるのであって，元のトラスと別のトラスを扱っているわけではないことに注意されたい)(Fig 1.53)．

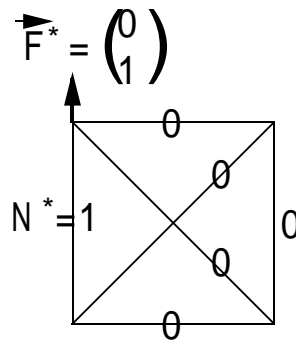


Fig 1.53

4. 1. で求めた適合系と，3. で求めたつりあい系に仮想仕事の原理の原理を適用する．

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{u}_i &= \sum_I N_I^* \delta_I \\ u_2 &= \frac{n\ell}{AE} = \frac{P\ell}{2AE} \end{aligned}$$

## 1.8 エネルギー原理

仮想仕事の原理の適用範囲は極めて広い。しかし、これまで扱ってきたように、構成関係が  $\delta = f(N)$  のように部材力だけの関数からなる場合には、仮想仕事の原理を“使用する上でより記憶しやすい形式”に書き改めることができる。ここでは、次の二点について順次述べていくことにする。

- 補ポテンシャルエネルギー停留原理 (応力法)  
仮想仕事による不静定構造の解法と等価である。
- Castigliano(カステリアーノ)の定理  
単位荷重法と等価である。

### 1.8.1 補ポテンシャルエネルギー停留原理

補ポテンシャルエネルギー停留原理を示す前に、いくつかの用語を説明しよう。

補ポテンシャルエネルギー (Complementary Potential Energy) とは、静力学的に許容な系  $(\mathbf{F}, N)$  を変数として次のように定義された関数  $\Pi^*$  である。

$$\Pi^*(\mathbf{F}, N) = \sum_{I: \text{全ての部材}} W^*(N_I) - \sum_{i: \text{変位が既知な節点}} \mathbf{u}_i^0 \cdot \mathbf{F}_i \quad (1.11)$$

ここで、 $\mathbf{u}_i^0$  は境界条件として与えられた変位である。また、 $W^*(N)$  は補ひずみエネルギーと呼ばれ、

$$W^*(N) = \int \delta(N) dN \quad (1.12)$$

と定義されるものである。 $\delta(N)$  は構成関係によって  $N$  から求められたのびである。前提として、構成関係が  $N$  だけの関数である、すなわち弾性体を考えているということに注意されたい。なお、ひずみエネルギーというのは、

$$W(N) = \int N(\delta) d\delta \quad (1.13)$$

と定義されるものである。

さて、線形弾性トラスの場合の構成関係は、

$$\delta = \frac{N\ell}{AE} + \delta_0 \quad (1.14)$$

と表された。ここで、 $\delta_0$  は熱などによるのびを表している (なければ、当然 0)。この式を式 (1.12) に代入して、積分を実行すれば、線形弾性トラスの補ひずみエネルギーは次のように表される。

$$W^*(N) = \frac{N^2\ell}{2AE} + \delta_0 N \quad (1.15)$$

ひずみエネルギーの物理的な意味はほぼ明らかであるが、補ひずみエネルギーの物理的な意味は一般にはわかりにくい。しかし、線形弾性のときには、Fig 1.54 より、 $W^*(N) = W(N)$  となることがわかる。つまりひずみエネルギーと一致する。

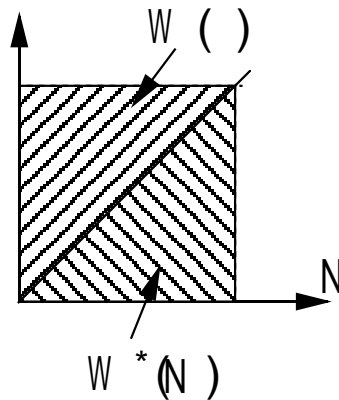


Fig 1.54 線形弾性の場合の  $W$  と  $W^*$  の関係

なお，ポテンシャルエネルギー  $\Pi$  とは，幾何的に許容な  $(\mathbf{u}, \delta)$  の関数として，

$$\Pi(N) = \sum_{I: \text{全ての部材}} W(\delta) - \sum_{i: \text{力が既知な節点}} \mathbf{F}_i^0 \cdot \mathbf{u}_i \quad (1.16)$$

と定義されるものである．これは，変位法の解析に用いられる．

定理 補ポテンシャルエネルギー停留原理：不静定構造における静力学的に許容な部材力のうち，正解（構成関係から得た変形の系が幾何的に許容であるもの）は補ポテンシャルエネルギーを停留にする．すなわち，不静定力  $n_i (i = 1, 2, \dots)$  を含んだ静力学的に許容な  $(\mathbf{F}(n_i), N(n_i))$  の補ポテンシャルエネルギー  $\Pi^*(\mathbf{F}(n_i), N(n_i))$  は

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial n_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

を満たす．

なお，構造力学の多くの問題（支点沈下がない問題）では， $\mathbf{u}_i^0 = 0$  である．したがって，

$$\Pi^* = \sum_I W^*(N_I) - \sum_i \mathbf{u}_i^0 \cdot \mathbf{F}_i = \sum_I W^*(N_I)$$

となる．また，部材の構成関係が線形ならば， $W^* = W$  であったから，

$$\Pi^* = \sum_I W(\delta_I)$$

となり， $\Pi^*$  はひずみエネルギーになる．このため，補ポテンシャル停留原理の事をしばしば最小仕事の原理という．

さて，補ポテンシャル停留原理の証明を与えよう．

[証明] まず，式 (1.11) を不静定力 (の一つ)  $n$  で微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi^*}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \sum_I W^*(N_I) - \sum_{i: \substack{\text{変位が既知} \\ \text{な節点}}} \mathbf{u}_i^0 \cdot \mathbf{F}_i \right\} \\ &= \sum_I \frac{\partial W^*}{\partial N_I} \frac{\partial N_I}{\partial n} - \sum_{i: \substack{\text{変位が既知} \\ \text{な節点}}} \mathbf{u}_i^0 \cdot \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial n}\end{aligned}$$

となる．ここで， $W^* = \int \delta dN$  より  $\frac{\partial W^*}{\partial N_I} = \delta_I$  であるから，

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial n} = \sum_I \delta_I \frac{\partial N_I}{\partial n} - \sum_{i: \substack{\text{変位が既知} \\ \text{な節点}}} \mathbf{u}_i^0 \cdot \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial n}$$

と書ける．ここで，変位が未知な節点とは力が既知な節点なので，そこでは  $\partial \mathbf{F}_i / \partial n = 0$  が成立している．したがって， $i$  に関する和は全節点に渡って取ってもよい．したがって

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial n} = \sum_I \delta_I \frac{\partial N_I}{\partial n} - \sum_i \mathbf{u}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial n}$$

となる．ここで，“ $\left( \frac{\partial N_I}{\partial n}, \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial n} \right)$  は，外荷重 = 0 のつりあい系である (\*)” という事実 (後述) と  $(\delta_I, \mathbf{u}_i)$  は適合系でなければならないから，仮想仕事の原理によって，

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial n} = 0$$

が成立する．

[証明終]

さて，上の (\*) を証明しよう．まず， $(\mathbf{F}(n), N(n))$  が静力学的に許容であることを仮定しているから，

$$\mathbf{F}_i = \sum_I \mathbf{n}_{iI} N_I$$

が成立している．これを  $n$  で微分すると，

$$\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial n} = \sum_I \mathbf{n}_{iI} \frac{\partial N_I}{\partial n}$$

を得る．この式は， $\left( \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial n}, \frac{\partial N_I}{\partial n} \right)$  がつりあい系であることを意味している．しかも，力が既知な節点では  $\mathbf{F}_i$  は  $n$  によらないので，

$$\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial n} = \mathbf{0}$$

が成立する．すなわち，外荷重は 0 である．以上より， $\left( \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial n}, \frac{\partial N_I}{\partial n} \right)$  は外荷重 = 0 のつりあい系であることが証明された．

補ポテンシャルエネルギー停留原理は不静定トラスの仮想仕事による解法と全く等価であるが，“覚えやすい”，“一つのスカラー量  $\Pi^*$  だけを考えればよい”等の利点があるために広く用いられている（構造力学ではこれで十分？）．しかし，構成関係を弾性体（ $\delta = f(N)$ ）に限定している点で，仮想仕事の原理よりも適用範囲が狭いのだということをもう一度注意しておこう．さて，補ポテンシャルエネルギー停留原理によってトラスを解いてみよう．

【例題 16】 Fig 1.55 のトラスの部材力を決定せよ．

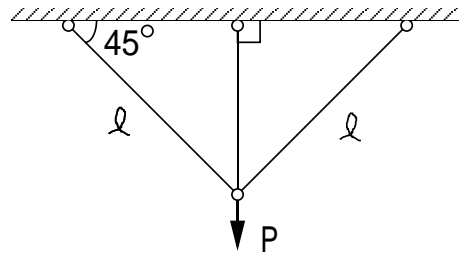


Fig 1.55 断面積  $A$ ，Young 率  $E$

力のつりあいと境界条件より部材力が次のように求まる (Fig 1.56) ．

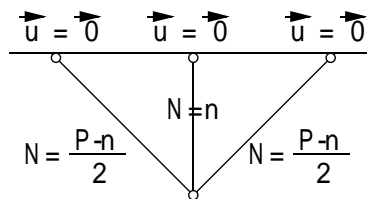


Fig 1.56

これより，

$$\Pi^* = \frac{\ell}{2AE} \left( \frac{P-n}{\sqrt{2}} \right)^2 \times 2 + \frac{\ell/\sqrt{2}}{2AE} n^2 - 0$$

となる．これに補ポテンシャルエネルギー停留原理を適用すると，

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial n} = \frac{\ell}{AE} (n - P) + \frac{\ell/\sqrt{2}}{AE} n = 0$$

である．ゆえに，

$$n = \frac{P}{1 + 1/\sqrt{2}}$$

を得る．これは例題 12 の解と一致することを確認せよ．

【例題 17】 Fig 1.57 のトラスの中央の支点が  $\Delta$  だけ上昇した時の部材力を決定せよ .

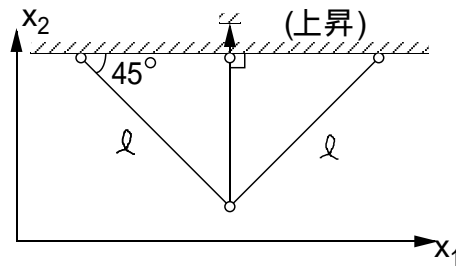


Fig 1.57 断面積  $A$  , Young 率  $E$

静力学的に許容な部材力は

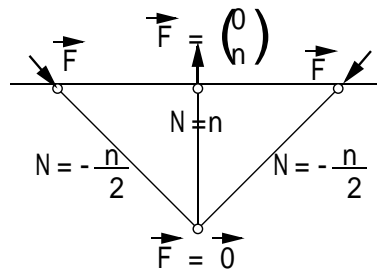


Fig 1.58

Fig 1.58 のようになる . ここで , 変位の境界条件は

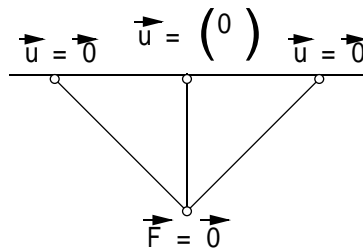


Fig 1.59

Fig 1.59 のようであることに注意すると , 補ポテンシャルエネルギーは ,

$$\Pi^* = \frac{\ell}{2AE} \left( -\frac{n}{\sqrt{2}} \right)^2 \times 2 + \frac{n^2}{2AE} \frac{\ell}{\sqrt{2}} - n\Delta = \frac{(\sqrt{2}+1)n^2\ell}{2\sqrt{2}AE} - n\Delta$$

と計算される . これに補ポテンシャルエネルギー停留原理を適用すると ,

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial n} = \frac{(\sqrt{2}+1)n\ell}{\sqrt{2}AE} - \Delta = 0$$

となるから，

$$n = \frac{\sqrt{2} \Delta AE}{(\sqrt{2} + 1) \ell}$$

を得る．

【例題 18】 Fig 1.60 のトラスの右側の部材の温度が  $\Delta t$  だけ上昇した時の部材力を決定せよ．

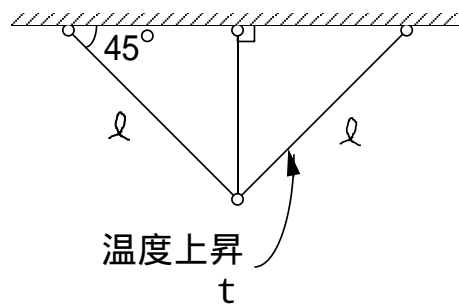


Fig 1.60 断面積  $A$  , Young 率  $E$

静力学的に許容な部材力は

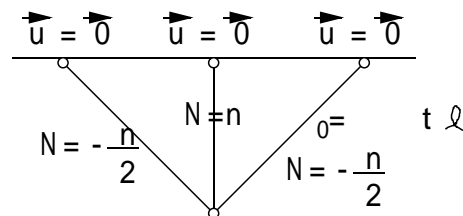


Fig 1.61

Fig 1.61 のようになる．これより，補ポテンシャルエネルギーは，

$$\Pi^* = \underbrace{\frac{\ell}{2AE} \left(-\frac{n}{\sqrt{2}}\right)^2}_{\text{左}} + \underbrace{\frac{\ell/\sqrt{2}}{2AE} n^2}_{\text{中央}} + \underbrace{\frac{\ell}{2AE} \left(-\frac{n}{\sqrt{2}}\right)^2}_{\text{右}} + \delta_0 \left(-\frac{n}{\sqrt{2}}\right)$$

と計算される．これに補ポテンシャルエネルギー停留原理を適用すると，

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial n} = \frac{\ell}{2AE} 2n + \frac{\ell}{\sqrt{2}AE} n - \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_0 = 0$$

となるから，

$$n = \frac{AE}{(\sqrt{2} + 1) \ell} \delta_0 = \frac{AE}{\sqrt{2} + 1} \alpha \Delta t$$

を得る．

## 1.8.2 Castigliano の定理

トラスの変位を求めるために単位荷重法を既に学んだ。トラスが弾性体であるとした場合には，トラスの変位を求めるには次の Castigliano の定理が便利である。

定理 Castigliano の定理：トラスの真の部材力  $(N, \mathbf{F})$  が既に決定されているとする。このとき，ある節点のある方向への変位は次のように求められる。

$$\left. \frac{\partial \Pi^*(N + QN^*, \mathbf{F} + Q\mathbf{F}^*)}{\partial Q} \right|_{Q=0} \quad (1.18)$$

ここに， $(N^*, \mathbf{F}^*)$  は，変位を求めたい節点に求めたい方向に大きさ 1 の荷重を作用させたときの (任意の) つりあい系である。特に，ある荷重  $P$  が作用している問題において， $P$  の作用点の  $P$  方向の変位は

$$\frac{\partial \Pi^*(N, \mathbf{F})}{\partial P} \quad (1.19)$$

で求められる。

[証明] まず，前半部分の証明を与えよう。補ひずみエネルギーの定義より，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^*(N + QN^*, \mathbf{F} + Q\mathbf{F}^*)}{\partial Q} &= \frac{\partial}{\partial Q} \sum_I W^*(N_I + QN_I^*) - \frac{\partial}{\partial Q} \sum_{\substack{i: \text{変位が} \\ \text{既知の節点}}} \mathbf{u}_i^0 \cdot (\mathbf{F}_i + Q\mathbf{F}_i^*) \\ &= \sum_I \frac{\partial W^*(N_I + QN_I^*)}{\partial N_I} N_I^* - \sum_{\substack{i: \text{変位が} \\ \text{既知の節点}}} \mathbf{u}_i^0 \cdot \mathbf{F}_i^* \end{aligned}$$

と計算できる。  $Q = 0$  として，  $\partial W^*(N_I)/\partial N_I$  が  $W^*$  の定義 (1.15) により  $\delta_I$  となることに注意すれば，

$$\left. \frac{\partial \Pi^*(N + QN^*, \mathbf{F} + Q\mathbf{F}^*)}{\partial Q} \right|_{Q=0} = \sum_I \delta_I N_I^* - \sum_{\substack{i: \text{変位が} \\ \text{既知の節点}}} \mathbf{u}_i^0 \cdot \mathbf{F}_i^*$$

となる。ここで，  $(\delta_I, \mathbf{u}_i)$  は適合系，  $(N^*, \mathbf{F}_i^*)$  はつりあい系であるから，これらに対して仮想仕事の原理

$$\begin{aligned} \sum_I \delta_I N_I^* &= \sum_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{F}_i^* \\ &= \left( \sum_{\substack{i: \text{変位が} \\ \text{既知の節点}}} + \sum_{\substack{i: \text{節点力が} \\ \text{既知の節点}}} \right) \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{F}_i^* \end{aligned}$$

が成立している。したがって，

$$\left. \frac{\partial \Pi^*(N + QN^*, \mathbf{F} + Q\mathbf{F}^*)}{\partial Q} \right|_{Q=0} = \sum_{\substack{i: \text{節点力が} \\ \text{既知の節点}}} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{F}_i^*$$



を得る．ここで，節点力  $F_i^*$  が，変位を求めたい節点に求めたい方向にだけ作用しているとすれば，上式の右边が表している量は求めたい変位に他ならない．

後半部分を証明しよう．簡単のために荷重が  $P$  のみの時について証明する． $(N^*, F^*)$  として  $(N/P, F/P)$  をとることができる．したがって， $N = PN^*$ ， $F = PF^*$  である．このとき，

$$\Pi^*(N + QN^*, F + QF^*) = \Pi^*((P + Q)N^*, (P + Q)F^*)$$

であるから，

$$\left. \frac{\partial \Pi^*}{\partial Q} \right|_{Q=0} = \left. \frac{\partial \Pi^*}{\partial P} \right|_{Q=0} = \frac{\partial}{\partial P} \Pi^*(PN^*, PF^*) = \frac{\partial \Pi^*(N, F)}{\partial P}$$

[証明終]

【例題 19】 Fig 1.62 のトラスについて，荷重の作用点での変位を求めよ (断面積  $A$ ，Young 率  $E$ ) ．

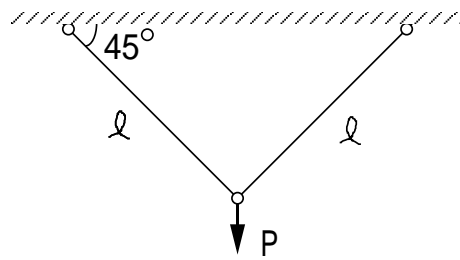


Fig 1.62 静定トラス

真の部材力は Fig 1.63 のようである．

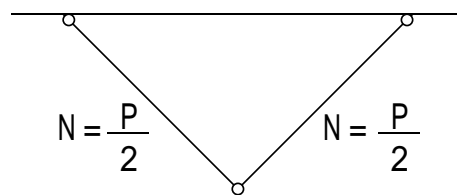


Fig 1.63

まず，荷重の作用方向 ( $x_2$  方向) の変位  $u_2$  を求めよう．このためには Castigliano の定理の後半部分を適用すれば十分である．すなわち，

$$\Pi^* = \frac{\ell}{2AE} \left( \frac{P}{\sqrt{2}} \right)^2 \times 2 = \frac{P^2 \ell}{2AE}$$

となる．ゆえに，

$$u_2 = \frac{\partial \Pi^*}{\partial P} = \frac{Pl}{AE}$$

を得る．

もちろん，次のように Castigliano の定理の前半部分を用いても解ける．すなわち，

$$\begin{aligned} \Pi^*(N + QN^*, \mathbf{F} + Q\mathbf{F}^*) &= \frac{\ell}{2AE} \left( \frac{P+Q}{\sqrt{2}} \right)^2 \times 2 \\ u_2 &= \left. \frac{\partial \Pi^*}{\partial P} \right|_{Q=0} = \frac{Pl}{AE} \end{aligned}$$

となる．

続いて  $x_1$  方向の変位  $u_1$  を求めよう．仮想のつりあい系としては

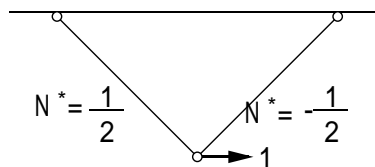


Fig 1.64

Fig 1.64 のようなものが取れるから，

$$\Pi^*(N + QN^*, \mathbf{F} + Q\mathbf{F}^*) = \frac{\ell}{2AE} \left\{ \left( \frac{P}{\sqrt{2}} + \frac{Q}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{P}{\sqrt{2}} - \frac{Q}{\sqrt{2}} \right)^2 \right\}$$

と計算される．ゆえに，

$$u_1 = \left. \frac{\partial \Pi^*}{\partial Q} \right|_{Q=0} = \frac{\ell}{2AE} \{(P+Q) + (Q-P)\}|_{Q=0} = 0$$

を得る．

【例題 20】 Fig 1.65 のトラスの A 点での変位を求めよ (断面積  $A$ ，Young 率  $E$ ) ．

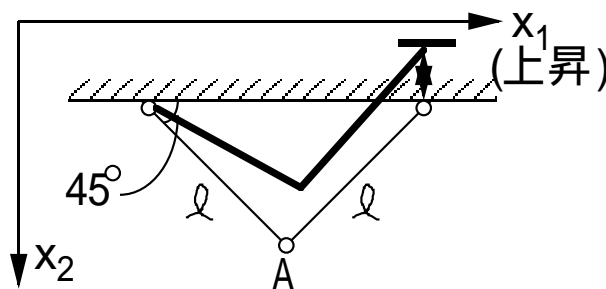


Fig 1.65 静定トラス

真のつりあい系および変位の境界条件は Fig 1.66 および Fig 1.67 の通りである .

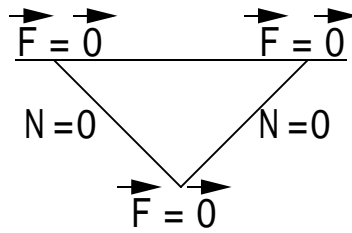


Fig 1.66 静定トラス

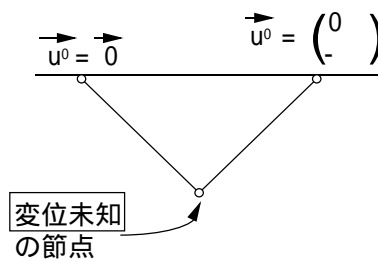


Fig 1.67

まず ,  $x_2$  方向の変位  $u_2$  を求めよう . このときの仮想のつりあい系は Fig 1.68 の通りである .

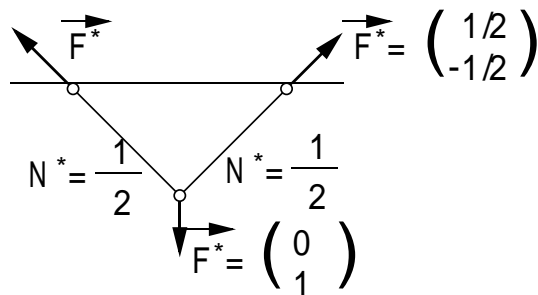


Fig 1.68

したがって ,

$$\begin{aligned} \Pi^*(N + QN^*, \mathbf{F} + Q\mathbf{F}^*) &= \frac{\ell}{2AE} \left\{ \left( 0 + \frac{Q}{\sqrt{2}} \right)^2 \times 2 \right\} - \sum_{\substack{i: \text{変位が既} \\ \text{知の節点}}} \mathbf{u}_i^0 \cdot \left( \underbrace{\mathbf{F}_i}_0 + Q\mathbf{F}_i^* \right) \\ &= \frac{\ell}{2AE} Q^2 - \frac{\Delta}{2} Q \end{aligned}$$

を得る . ゆえに ,

$$u_2 = \left. \frac{\partial \Pi^*}{\partial Q} \right|_{Q=0} = \left. \left( \frac{Q\ell}{AE} - \frac{\Delta}{2} \right) \right|_{Q=0} = -\frac{\Delta}{2}$$

となる。

次に,  $u_2$  を求めよう。仮想のつりあい系は Fig 1.69 の通りである。

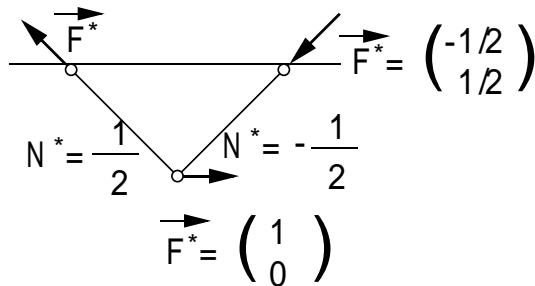


Fig 1.69

したがって,

$$\begin{aligned} & \Pi^*(N + QN^*, \mathbf{F} + Q\mathbf{F}^*) \\ &= \frac{\ell}{2AE} \left\{ \left(0 + \frac{Q}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(0 - \frac{Q}{\sqrt{2}}\right)^2 \right\} - \sum_{i: \text{変位が既知の節点}} \mathbf{u}_i^0 \cdot \left( \underbrace{\mathbf{F}_i}_0 + Q\mathbf{F}_i^* \right) \\ &= \frac{\ell}{2AE} Q^2 + \frac{\Delta}{2} Q \end{aligned}$$

を得る。ゆえに,

$$u_2 = \left. \frac{\partial \Pi^*}{\partial Q} \right|_{Q=0} = \left. \left( \frac{Q\ell}{AE} + \frac{\Delta}{2} \right) \right|_{Q=0} = \frac{\Delta}{2}$$

となる。

【例題 21】 Fig 1.70 のトラスの A 点での  $x_2$  方向の変位  $u_2$  を求めよ (断面積  $A$ , Young 率  $E$ , 線膨張率  $\alpha$ )。

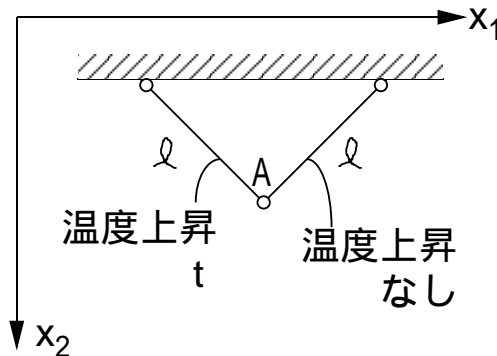


Fig 1.70 静定トラス

熱ひずみ  $\delta_0$  を有するトラスの補ひずみエネルギーが次のように書けることを再記しておく .

$$W^* = \frac{N^2 \ell}{2AE} + \delta_0 N$$

$$\delta_0 = \alpha \Delta t \ell$$

仮想のつりあい系は Fig 1.71 の通りである .

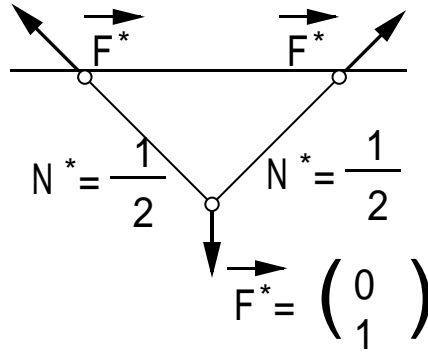


Fig 1.71

したがって ,

$$\begin{aligned} \Pi^*(N + QN^*, \mathbf{F} + Q\mathbf{F}^*) &= \sum_I W_I^*(N + QN^*) - \sum_{\substack{i: \text{変位が既} \\ \text{知の節点}}} \mathbf{u}_i^0 \cdot Q\mathbf{F}_i^* \\ &= \frac{\ell}{2AE} \left( \frac{Q}{\sqrt{2}} \right)^2 + \delta_0 \left( 0 + \frac{Q}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\ell}{2AE} \left( 0 + \frac{Q}{\sqrt{2}} \right)^2 \end{aligned}$$

となる . ゆえに ,

$$u_2 = \left. \frac{\partial \Pi^*}{\partial Q} \right|_{Q=0} = \frac{\delta_0}{\sqrt{2}} = \frac{\alpha \Delta t \ell}{\sqrt{2}}$$

上に示した例題は全て静定トラスであるが , Castigliano の定理は不静定トラスであっても適用できる . 不静定トラスの場合は , まず不静定トラスの解析を行って部材力を完全に決定しておく必要があるだけで , 部材力が決定した後の手続きは静定トラスと同じである . しかし , 次の二点に注意すると計算を有利に進めることができる .

注意 1 仮想のつりあい系は , 変位を求めたい点に求めたい方向へ大きさ 1 の荷重のかかっているものであればなんでもよい . すなわち , できるだけ簡単なものを選択すればよい (この事情は 1.7.3 節で述べたことと同じである) .

注意 2 荷重  $P$  が作用している点の変位は  $\frac{\partial \Pi^*(N, \mathbf{F})}{\partial P}$  で求められることは既に述べたが ,  $(N, \mathbf{F})$  は不静定力  $n$  と  $P$  の関数であり , 不静定構造を解くと  $n$  は  $P$  の関数  $n(P)$  として決定される . そうすると ,  $\frac{\partial \Pi^*}{\partial P}$  の計算を行なうときに ,  $n$  に  $n(P)$  を代入してから微分する

( $\frac{\partial \Pi^*}{\partial P}$  と書く) のか , 代入前に微分する ( $\frac{\partial \Pi^{*'}}{\partial P}$  と書く) のか疑問が生じる . 実はどちらでもよい . 実際 ,

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial P} = \frac{\partial \Pi^{*'}(P, n(P))}{\partial P} + \frac{\partial \Pi^*(P, n(P))}{\partial n} \frac{dn}{dP}$$

となるが , 補ポテンシャルエネルギー停留原理により右辺第二項は 0 である . したがって ,  $\frac{\partial \Pi^*}{\partial P}$  の計算において , 不静定力はあたかも  $P$  に依らないと思って微分してよい . 微分した後で  $n = n(P)$  を代入すれば , 求める変位が計算できる

上記二点を踏まえて例題を解いてみよう .

【例題 22】 Fig 1.72 のトラスについて , 荷重の作用点の変位を求めよ (断面積  $A$  , Young 率  $E$ ) .

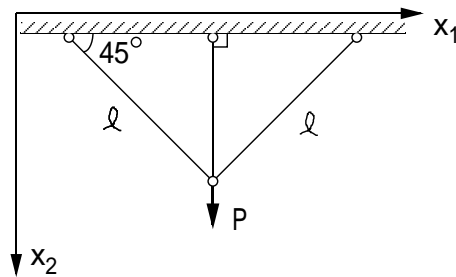


Fig 1.72 断面積  $A$  , Young 率  $E$

まず , 真の部材力を決定する ( $n = P/(1 + 1/\sqrt{2})$ )(Fig 1.73) .

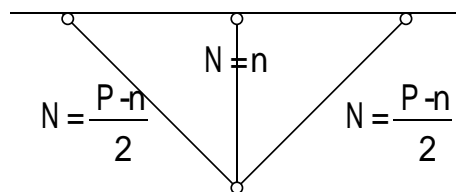


Fig 1.73

次に , 仮想のつりあい系を決定し , 変位の境界条件 (Fig 1.74) を考慮して補ポテンシャルエネルギー  $\Pi^*$  を求める .

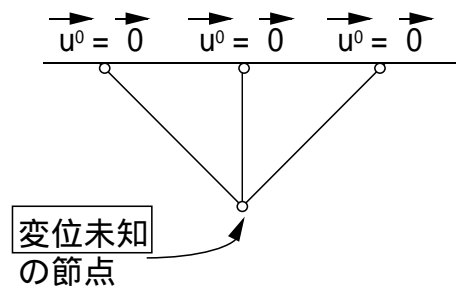


Fig 1.74

- $x_1$  方向の変位  $u_1$  を求める場合

仮想のつりあい系は Fig 1.75 のようになるから ,

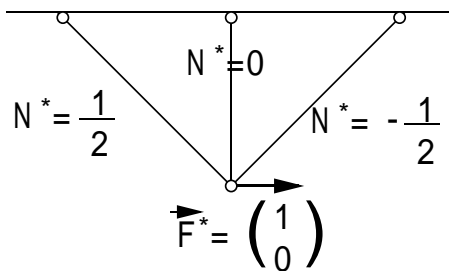


Fig 1.75

$$\begin{aligned} \Pi^* &= \frac{\ell}{2AE} \left( \frac{P-n}{\sqrt{2}} + \frac{Q}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{\ell}{2AE} \left( \frac{P-n}{\sqrt{2}} - \frac{Q}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{\ell/\sqrt{2}}{2AE} n^2 \\ u_1 = \frac{\partial \Pi^*}{\partial Q} \Big|_{Q=0} &= \frac{\ell}{AE} \left( \frac{P-n}{\sqrt{2}} + \frac{Q}{\sqrt{2}} \right) \Big|_{Q=0} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\ell}{AE} \left( \frac{P-n}{\sqrt{2}} - \frac{Q}{\sqrt{2}} \right) \Big|_{Q=0} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得る .

- $x_2$  方向の変位  $u_2$  を求める場合

上記 [注意 2] により , 不静定力  $n$  は  $n$  のままで用い , あたかも  $P$  の関数ではないかのよ  
うに計算してよい . したがって ,

$$\begin{aligned} \Pi^* &= \frac{\ell}{2AE} \left( \frac{P-n}{\sqrt{2}} \right)^2 \times 2 + \frac{\ell/\sqrt{2}}{2AE} n^2 \\ u_2 = \frac{\partial \Pi^*}{\partial P} &= \frac{\ell}{AE} (P-n) = \frac{P\ell}{(1+\sqrt{2})AE} \end{aligned}$$

を得る .

## 1.9 相反性定理

### 1.9.1 相反性定理と証明

定理 相反性定理 (Reciprocity theorem) : あるトラスの構成関係が線形 , すなわち  $\delta = N\ell/AE$  であるとする . このトラスの二つの境界値問題の解を  $(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{F}^{(1)}, \delta^{(1)}, N^{(1)})$  およ  
び  $(\mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{F}^{(2)}, \delta^{(2)}, N^{(2)})$  とする . このとき次式が成り立つ .

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(1)} \cdot \mathbf{u}_i^{(2)} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(2)} \cdot \mathbf{u}_i^{(1)} \quad (1.20)$$

[証明]

$$\begin{aligned}
 \sum_i \mathbf{F}_i^{(1)} \cdot \mathbf{u}_i^{(2)} &\stackrel{\text{仮想仕事}}{=} \sum_I N_I^{(1)} \delta_I^{(2)} \\
 &\stackrel{\text{構成関係}}{=} \sum_I \left( E_I A_I \frac{\delta_I^{(1)}}{\ell_I} \right) \delta_I^{(2)} \\
 &= \sum_I \delta_I^{(1)} \left( E_I A_I \frac{\delta_I^{(2)}}{\ell_I} \right) \\
 &\stackrel{\text{構成関係}}{=} \sum_I \delta_I^{(1)} N_I^{(2)} \\
 &\stackrel{\text{仮想仕事}}{=} \sum_i \mathbf{u}_i^{(1)} \cdot \mathbf{F}_i^{(2)}
 \end{aligned}$$

[証明終]

これまで述べた定理との関係をまとめると以下の通りである。

定理	制約事項	
仮想仕事	構成式に関係なし	一般
エネルギー原理	弾性体でのみ適用可	↓
相反性定理	線形弾性体でのみ適用可	特殊

### 1.9.2 相反性定理の応用 — Müller–Breslau の方法

相反性定理の応用として、Müller–Breslau の方法による影響線の作成について説明する。ここで影響線とは、「単位荷重が走行路上のある位置に作用する時の注目する量  $f$  (反力、部材力など) を荷重位置にプロットしたもの」である。ここで、走行路線上に座標  $x_1$  を取り、その上の隣り合った二つの節点 A, B を考える。走行路の点 A, B の間の区間には A と B を両端とする単純はりが渡されているものと考え、このとき、A と B の間の距離を  $\ell$  とするとき、位置  $x_1$  における注目する量  $f(x_1)$  は、トラスの力学が線形なので、

$$f(x_1) = f(A) \left(1 - \frac{x_1}{\ell}\right) + f(B) \frac{x_1}{\ell}$$

と書ける。したがって、量  $f$  の影響線は荷重が走行路上の節点にある時の  $f$  を折れ線で結んだものである。

定理 Müller–Breslau の方法 (支点反力の影響線の描き方)： 支点反力の影響線は、あるトラスが無荷重状態で反力を求めたい支点到大ききさ 1 の沈下を生じた時の走行路の形に等しい。

[証明] 簡単のため、例題において証明してみよう。

Fig 1.76 のトラスで単位荷重が中央の節点上にある場合を考える。



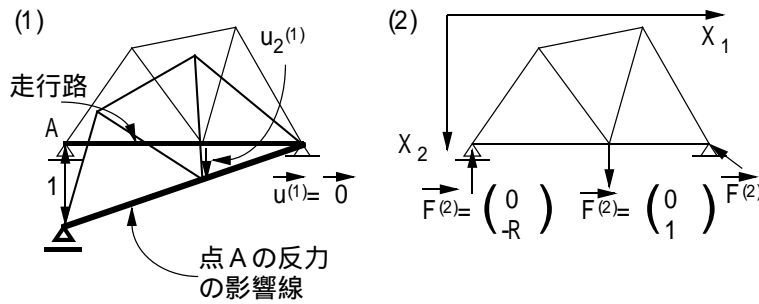


Fig 1.76 系 (1) および (2)

無荷重状態で支点を 1 だけ沈下させたトラスを系 (1)，中央節点に単純荷重が作用したトラスを系 (2) とする．定理の証明には系 (1) のトラスの中央の変位が系 (2) のトラスの左支点の反力であることを言えばよい．相反性定理

$$\sum \mathbf{F}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} = \sum \mathbf{F}^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(1)}$$

において，系 (1) は無荷重なので， $\mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{0}$  である．したがって，

$$0 = \underbrace{-R \cdot 1}_{\text{左支点}} + \underbrace{1 \cdot u_2^{(1)}}_{\text{中点}} + \underbrace{0}_{\text{右支点}}$$

となる．ゆえに，

$$R = u_2^{(1)}$$

を得る．

[証明終]

上の証明は静定，不静定の別にかかわらず成立する．静定トラスの場合，反力の影響線は元のトラスを剛体的に変位させたものになる．

【例題 23】 Fig 1.77 の A 点の反力の影響線を求めよ．

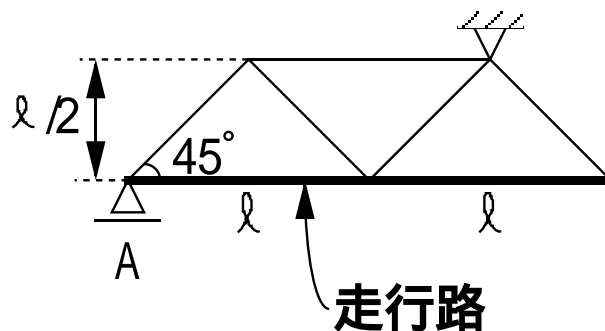


Fig 1.77 問題

Fig 1.78 の通り .

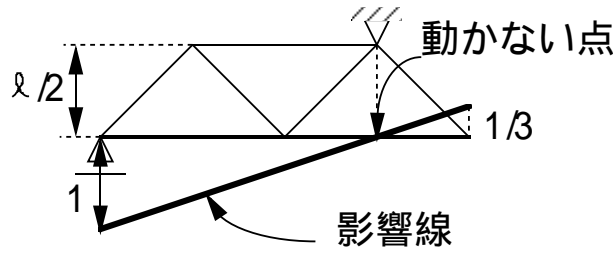


Fig 1.78 解答

【例題 24】 Fig 1.79 の A 点の反力を求めよ .

同図の通り .

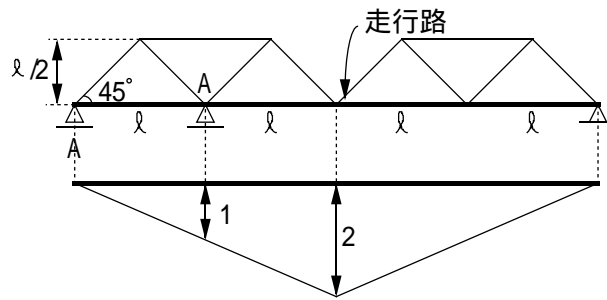


Fig 1.79 反力の影響線を求めよ

定理 Müller–Breslau の方法 (部材力の影響線の描き方) : あるトラスの部材力の影響線は , 同トラスで考えている部材を無荷重状態で 1 だけ伸ばした時の走行路のたわみ形状に等しい .

[証明] 例証してみよう . 証明の前に , 系 (1) に初期のび  $\delta_0^{(1)}$  がある場合 , すなわち構成式が  $\delta^{(1)} = \frac{\ell N^{(1)}}{E^{(1)} A^{(1)}} + \delta_0^{(1)}$  である場合の相反性定理を示す . このとき ,  $N^{(1)} = \frac{A^{(1)} E^{(1)} (\delta^{(1)} - \delta_0^{(1)})}{\ell^{(1)}}$  と書けるから ,

$$\begin{aligned}
 \sum_i \mathbf{F}_i^{(1)} \cdot \mathbf{u}_i^{(2)} &= \sum_I N_I^{(1)} \delta_I^{(2)} \\
 &= \sum_I \frac{A_I E_I}{\ell_I} (\delta_I^{(1)} - \delta_{0I}^{(1)}) \delta_I^{(2)} \\
 &= \sum_I (\delta_I^{(1)} - \delta_{0I}^{(1)}) N_I^{(2)} \\
 &= \sum_I \delta_I^{(1)} N_I^{(2)} - \sum_I \delta_{0I}^{(1)} N_I^{(2)} \\
 &= \sum_i \mathbf{u}_i^{(1)} \cdot \mathbf{F}_i^{(2)} - \sum_I \delta_{0I}^{(1)} N_I^{(2)} \tag{1.21}
 \end{aligned}$$

を得る．さて，Fig 1.80 の系 (1) および (2) について考える．

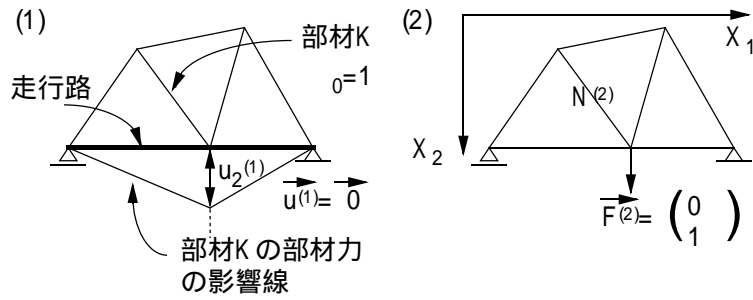


Fig 1.80 系 (1) と (2)

いま，1 だけ伸ばす部材を  $K$  とする．このとき式 (1.21) より，

$$0 = u_2^{(1)} - N_K^{(2)}$$

となる．ゆえに，系 (1) の走行路中央部のたわみは，

$$u_2^{(1)} = N_K^{(2)}$$

と求まる．したがって，求める部材力の影響線の概形は Fig 1.80 左のように  $u_2^{(1)}$  と端点を結んだ折れ線となる．定量的に部材力を決定するためには，中央部に単位荷重が作用している時の部材  $K$  の部材力を計算すればよい．このように，トラスの部材力に関する Müller-Breslau の方法は定量的に描くにはあまり実用的でないが，計算の手間を省くには便利である．

[証明終]

反力の影響線の描き方について，普通の描き方と Müller-Breslau の方法の手順を Fig 1.81 を例にとって比べると以下のようなのである．

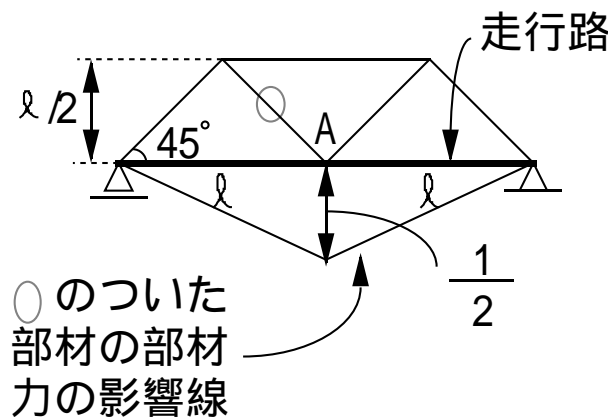


Fig 1.81 反力の影響線の描き方

- 普通の描き方

1. A 点に単位荷重がのっている時の  $\bigcirc$  のついた部材の部材力  $= \frac{1}{\sqrt{2}}$  を自力で計算する。
  2. 両支点に単位荷重がのっている時の  $\bigcirc$  のついた部材の部材力を求める (もちろん 0 である)。
  3. 以上の 3 点間を線分で結べばよい。
- Müller-Breslau による描き方
    1. Q の部材の長さを 1 だけのばしたときの走行路の概形を描く。
    2. A 点に単位荷重がのっている時の  $\bigcirc$  のついている部材の部材力を計算して書き込めばよい。

## 1.10 トラスの変位法による解法

### 1.10.1 変位法

今まで述べてきたトラスの解法は応力法によるものである。応力法は、

1. 静力学的に許容な  $(F, N)$  から出発
2. 構成式によって  $(\delta, \mathbf{u})$  を求める
3. 変形に関する適合条件から不静定力を決定

という手順を踏む。一方、幾何学的に許容な  $(\delta, \mathbf{u})$  から出発する (トラスの) 解法を変位法と呼ぶ。即ち、変位法においては

1. 幾何学的に許容な  $(\delta, \mathbf{u})$  から出発
2. 構成関係から  $N$  を求める
3.  $F$  が与えられた節点でつりあい式をたてることにより未知の  $u_j$  を求める

という手順で解を求める。

以下では、変位法のトラスの解法を説明する。簡単のために構成関係は線形弾性とする。このとき、

$$\begin{aligned}\delta_I &= \sum_i \mathbf{n}_{iI} \cdot \mathbf{u}_i \\ N_I &= \frac{E_I A_I}{l_I} \delta_I \\ \mathbf{F}_i &= \sum_I \mathbf{n}_{iI} N_I\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}
 N_I &= \frac{E_I A_I}{l_I} \sum_j \mathbf{n}_{jI} \cdot \mathbf{u}_j \\
 \mathbf{F}_i &= \sum_j \left( \sum_I \mathbf{n}_{iI} \frac{E_I A_I}{l_I} \mathbf{n}_{jI} \right) \cdot \mathbf{u}_j
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

が得られる。ベクトル  $\mathbf{n}_{iI}$ 、 $\mathbf{n}_{jI}$  はトラスの形状が定まれば既知であり、 $\mathbf{F}_i$  は当然  $F_i$  の与えられた節点では既知である。式 (1.22) の右辺を (行列)  $\times$  (ベクトル) の形で書くと、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix}$$

となり、 $F_i$  と  $u_i$  の既知の部分と未知の部分に分けて並べ替えると、

$$\begin{pmatrix} F_k \\ F_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{ku} & K_{kk} \\ K_{uu} & K_{uk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_u \\ u_k \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

のようになる。ここに、添字の  $k$  は既知、 $u$  は未知量に関連することを示す。節点のうち、 $F_i$  が既知である所では  $u_i$  が未知である事に注意し、(1.23) のうちの既知の  $F_i$  に対応する行を取り出せば、未知数  $u_u$  を決める方程式が次のように得られる。

$$(K_{ku})(u_u) = (F_k) - (K_{kk})(u_k)$$

右辺は大きさ  $m$  のベクトル、 $K_{ku}$  は  $m \times m$  の行列であり、 $u_u$  は大きさ  $m$  のベクトルであるから、

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

を解くことで  $u$  が決定できる。

## 例題

図 1.82 のように、荷重  $P$  が作用するトラスの節点 1 の変位を求める。ここに、節点 2 と節点 3 の変位は 0 とし、部材①、②ともに軸剛性  $EA$ 、長さ  $l$  とする。

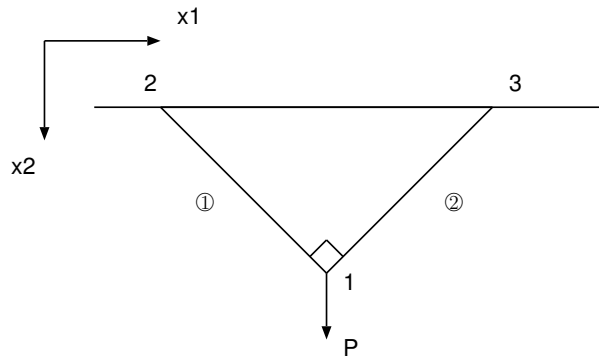


Fig 1.82 トラス

$n_{iI}$  は

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1\text{①} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbf{n}_2\text{①} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{n}_1\text{②} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbf{n}_3\text{②} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求められるので、方程式

$$\mathbf{F}_i = \sum_j (\sum_I \mathbf{n}_{iI} \frac{E_I A_I}{l_I} \mathbf{n}_{jI}) \cdot \mathbf{u}_j$$

は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ F_{12} \\ F_{22} \\ F_{13} \\ F_{23} \end{pmatrix} = \frac{AE}{l} \left[ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{13} \\ u_{23} \end{pmatrix}$$

ここで、[ ]内の1つ目の行列は部材①に関する部分であり、2つ目の行列は部材②に関する部分である。また、 $F_i$ と $u_i$ のうち、既知であるのは $F_{11}$ ,  $F_{21}$ ,  $u_{12}$ ,  $u_{22}$ ,  $u_{13}$ ,  $u_{23}$ であり、未知であるのは $F_{12}$ ,  $F_{22}$ ,  $F_{13}$ ,  $F_{23}$ ,  $u_{11}$ ,  $u_{21}$ である。この方程式の上二行に着目すると、

$$\begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix} = \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix} + \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{13} \\ u_{23} \end{pmatrix}$$

となっている。 $u_{12}$ ,  $u_{22}$ ,  $u_{13}$ ,  $u_{23}$ は0だから、

$$\begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix} = \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix}$$

となり、これを解くと、

$$\begin{aligned} u_{11} &= 0 \\ u_{21} &= \frac{Pl}{AE} \end{aligned}$$

が得られる。

以上のように変位法は機械的に計算を進める事ができ、計算機向きの解法であると言える。ただし、全ての節点の変位が与えられた問題でない限り、どんな簡単な問題でも線形方程式の解に帰着されるので、必ずしも手計算には向いているとは言えない。

## 注意

- 静定、不静定は応力法における概念である。変位法においては静定、不静定の別は特に意味を持たない。

### 1.10.2 変位法 + 仮想仕事によるトラスの解法

仮想仕事の原理を用いた変位法の解法は、今まで述べた変位法のトラスの解法と本質的に変わらないが、強いて言えば、釣合系を「任意の適合系と仮想仕事の原理を満たすもの」として導くところが僅かに違う。その手順は以下のようなものである。

1. 幾何学的に許容な  $(\delta, u)$  から出発
2. 構成関係から部材力を求める (この部材力と節点力を合わせたものはつりあい系でなければならない)
3. 「与えられた節点変位」が 0 の任意の適合系を  $(\delta^*, u^*)$  とする
4. 2. のつりあい系と 3. の適合系に仮想仕事を用いる

## 例題

図 1.83 のように、荷重  $P$  が作用するトラスの節点 1 の変位を求める。ここに、節点 2 と節点 3 の変位は 0 とし、部材①、②ともに軸剛性  $EA$ 、長さ  $l$  とする。

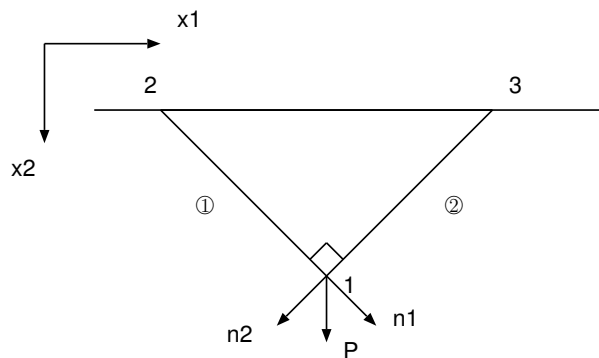


Fig 1.83 トラス

ベクトル  $n_1$ 、 $n_2$  はそれぞれ

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で表される。

1.  $(\delta, \mathbf{u})$  から出発

$$\delta_{\textcircled{1}} = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{u} \quad \delta_{\textcircled{2}} = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{u}$$

2. 構成関係から部材力を求める

$$N_{\textcircled{1}} = AE \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{u}}{l} \quad N_{\textcircled{2}} = AE \frac{\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{u}}{l}$$

3. 仮想仕事を用いる

$$\begin{aligned} \delta_{\textcircled{1}}^* &= \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{u}^* & \delta_{\textcircled{2}}^* &= \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{u}^* \\ \sum \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}^* &= \sum N \delta^* \end{aligned}$$

ここに  $\mathbf{u}^*$  は任意のベクトル。

$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$  を  $\mathbf{P}$  と表記すると、

$$\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{P} = \mathbf{u}^* \frac{AE}{l} [\mathbf{n}_1(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{n}_2(\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{u})]$$

を得る。 $\mathbf{u}^*$  は任意なので

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \frac{AE}{l} [\mathbf{n}_1(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{n}_2(\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{u})] \\ &= \frac{AE}{l} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left( \frac{u_1}{\sqrt{2}} + \frac{u_2}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \left( -\frac{u_1}{\sqrt{2}} + \frac{u_2}{\sqrt{2}} \right) \right] \\ &= \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって、

$$\mathbf{u} = \frac{l}{AE} \mathbf{P}$$

が得られる。

### 1.10.3 変位法 + エネルギー法によるトラスの解法

K.A. な  $(\mathbf{u}, \delta)$  に対して、ポテンシャルエネルギー  $\Pi(\mathbf{u}, \delta)$  を次のように定義する

$$\Pi(\mathbf{u}, \delta) = \sum_I W(\delta_I) - \sum_{i:F \text{ given}} \mathbf{F}_i^0 \cdot \mathbf{u}_i$$

ここに、 $\mathbf{F}_i^0$  は与えられた節点力を表し、第 2 項は節点力 (荷重) が与えられた節点のみについて和をとる。また、 $W$  はひずみエネルギー

$$W(\delta) = \int_0^\delta N(\delta) d\delta$$

である。この時、次の結果が成り立つ。



## ポテンシャルエネルギー停留原理

幾何学的に許容な  $(\delta, \mathbf{u})$  の未知の節点変位  $u_i$  は  $\frac{\partial \Pi}{\partial u_j} = 0$  より求まる。ここに  $j$  は、全ての「 $F_i$  が与えられている節点」の節点番号である。

(証明)

ある節点  $i$  で  $u_i$  が未知であるとする。その時、節点  $i$  では  $F_i$  は与えられている事に注意する。 $\frac{\partial \Pi}{\partial u_i}$  を計算すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} &= \sum_I \frac{\partial W}{\partial \delta_I} \frac{\partial \delta_I}{\partial u_i} - F_i^0 \\ &= \sum_I N(\delta_I) \mathbf{n}_{iI} - F_i^0\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} &= 0 \\ \Leftrightarrow F_i^0 &= \sum_I N(\delta_I) \mathbf{n}_{iI}\end{aligned}$$

を得る。これは節点力が与えられている節点  $i$  におけるつりあい式にほかならない。(証明終了)  
以上より、ポテンシャル停留原理によるトラスの解法は次のようになる。

1. 幾何学的に許容な  $(\delta, \mathbf{u})$  から出発
2.  $\Pi$  を求める
3. 未知の節点変位  $u_i$  は  $\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0$  より求める。

## 第2章 はりにおける仮想仕事

まず，線形弾性論について簡単に復習する．それを基にして，はりの理論について述べる．続いて，はりにおける仮想仕事の原理を示し，最後にその応用例を示す．

### 2.1 線形弾性体の力学

線形弾性論について簡単に復習しておこう．

#### 2.1.1 変形

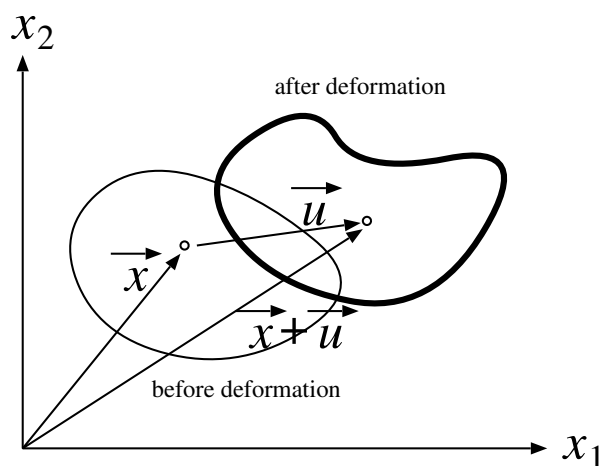


Fig 2.1 弾性体の変形

変形の尺度としてはひずみが用いられる．ひずみは9つの成分からなり，それを  $\epsilon_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) と表す． $\epsilon_{11}$ ， $\epsilon_{22}$ ， $\epsilon_{33}$  を直ひずみと呼ぶ．例えば， $\epsilon_{11}$  は

$$\epsilon_{11} = \frac{x_1 \text{ 方向の変形後の長さ} - x_1 \text{ 方向の変形前の長さ}}{x_1 \text{ 方向の変形前の長さ}}$$

と定義される．ここで Fig 2.2 のような線形弾性体の微小要素を考えれば，

$$\text{変形前の長さ} = dx_1$$

$$\text{変形後の長さ} = dx_1 + u_1(x_1 + dx_1) - u_1(x_1)$$

であるから， $dx_1 \rightarrow 0$  の極限において，

$$\epsilon_{11} = \frac{\{dx_1 + u_1(x_1 + dx_1) - u_1(x_1)\} - dx_1}{dx_1} \rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

を得る．同様に  $x_2, x_3$  方向の直ひずみ  $\epsilon_{22}, \epsilon_{33}$  は，

$$\epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

と計算される．

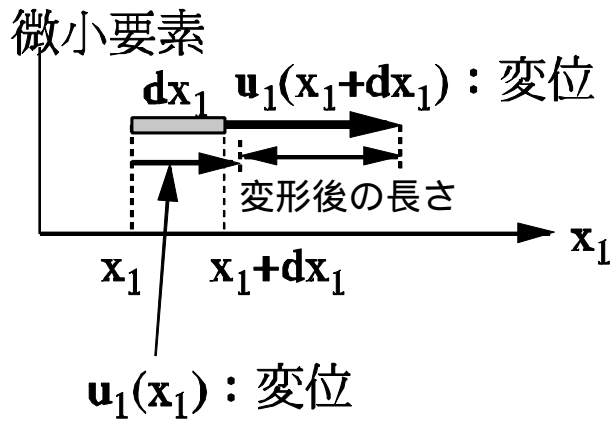


Fig 2.2 線形弾性体の微小要素

その他のひずみ成分をせん断ひずみと呼び，

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$$

などと定義する．ここに， $\theta_1$  および  $\theta_2$  は Fig 2.3 のような角度を表しており，微小変形の場合には，Fig 2.4 のように変位によって表現される．したがって，

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

と書ける．

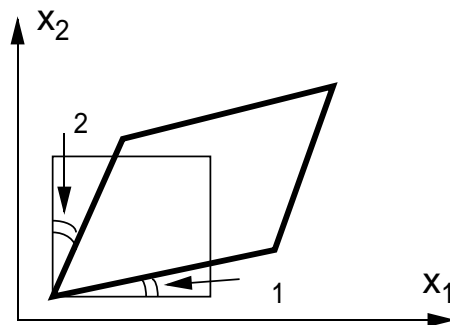


Fig 2.3 せん断変形

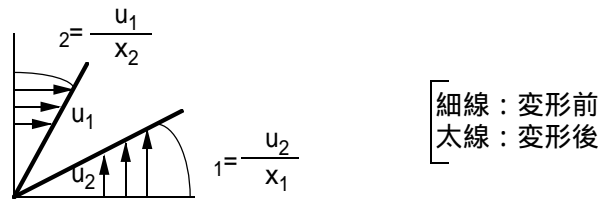


Fig 2.4 微小変形を仮定した場合のせん断変形

結局，直ひずみとせん断ひずみはまとめて

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

と表すことができる．

### 2.1.2 表面力と応力

まず，物体がつりあっているとは，“物体に作用する力の合力と合モーメントがそれぞれ零”であることをいう (Fig 2.5)．すなわち，

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0$$

$$\sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i = 0$$

である．

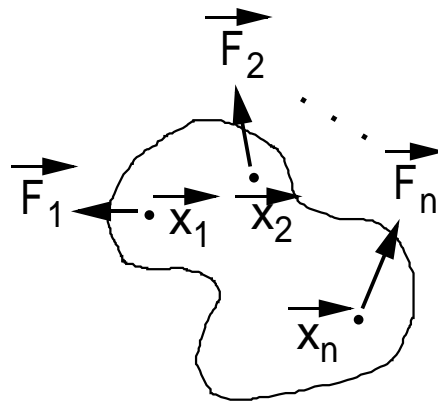


Fig 2.5 物体のつりあい

連続体内部に生じる力について考えてみよう．いま，連続体の内部に仮想的な微小切断面 (面積を  $dA$  とする) をとり，その切断面に単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  を設けておく．ここで， $d\mathbf{F}$  を  $\mathbf{n}$  の向いている側の物質が  $dA$  を通して  $(-\mathbf{n})$  の向いている側の物質に及ぼす力であるとする．

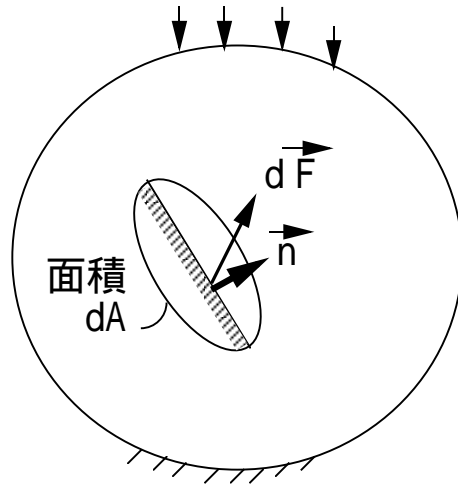


Fig 2.6 連続体内部に設けた仮想的な微小切断面

このとき，

$$t(x, n) = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{dF}{dA}$$

と定義されるベクトル  $t$  を表面力 (traction) と呼ぶ。ここで，微小切断面上でのつりあいにより (Fig 2.7)，

$$t(x, -n) = -t(x, n)$$

が成立する。

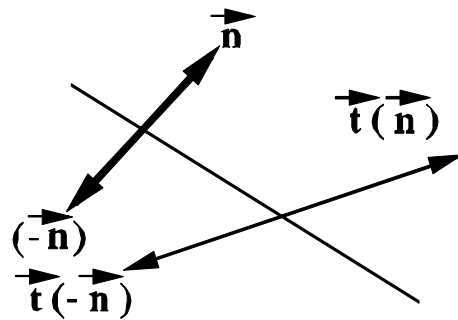


Fig 2.7 微小切断面上のつりあい

さて，Cauchy の式と呼ばれる公式を誘導してみる。ここでは，簡単のために二次元の場合について考える。いま，Fig 2.8 および 2.9 のような微小三角形のつりあい式を立てると，

$$0 = t(n)ds + t(-i_2)ds \sin \theta + t(-i_1)ds \cos \theta$$

が得られる。

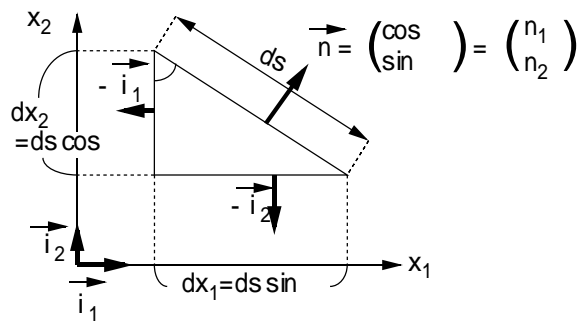


Fig 2.8 二次元の微小三角形

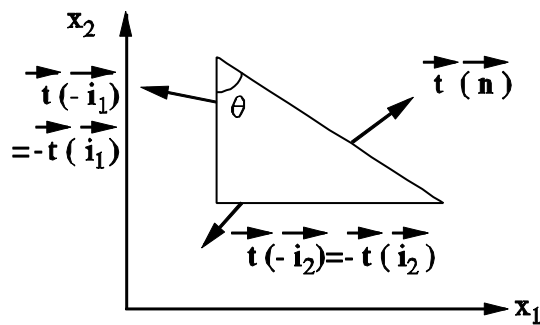


Fig 2.9 二次元の微小三角形

ここで上式を,

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{t}(\mathbf{i}_1)n_1 + \mathbf{t}(\mathbf{i}_2)n_2$$

と書き, 記号

$$\mathbf{t}(\mathbf{i}_1) = (\tau_{11}, \tau_{21})^T, \quad \mathbf{t}(\mathbf{i}_2) = (\tau_{12}, \tau_{22})^T$$

を導入すると,

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

すなわち

$$t_i = \sum_j \tau_{ij} n_j \quad (2.1)$$

が得られる. 上式を Cauchy の式と呼ぶ. 三次元の場合には式 (2.1) で添字の範囲を 3 まで取ればそのまま成立する. ここで,  $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}$  を直応力, その他の成分をせん断応力と呼ぶ (Fig 2.10).

さらに, Fig 2.10 の微小長方形に対してモーメントのつりあい式をたてれば,

$$\tau_{12} = \tau_{21}$$

を得る．同様にして

$$\tau_{13} = \tau_{31}, \quad \tau_{23} = \tau_{32}$$

も得られる．すなわち応力は対称である．

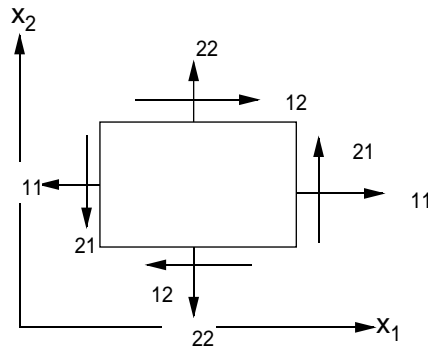


Fig 2.10 応力成分

### 2.1.3 構成関係 (応力-ひずみ関係)

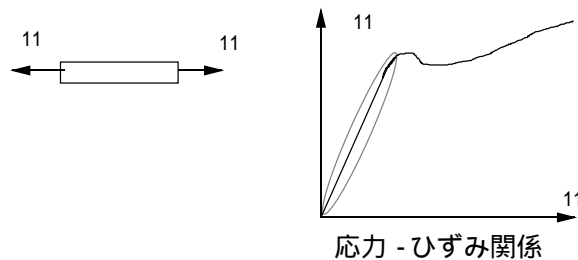


Fig 2.11 一軸引張を受ける物質の応力-ひずみ関係

Fig 2.11 左図のように，例えば軟鋼でできた細い棒を軸方向 ( $x_1$  方向とする) に引っ張り，ひずみ  $\epsilon_{11}$  と応力  $\tau_{11}$  の値をプロットしてみよう．すると，Fig 2.11 右図のような結果が得られる．この物質では， $\epsilon_{11}$  が小さい範囲では， $\epsilon_{11}$  と  $\tau_{11}$  との関係 (すなわち，構成関係) がほぼ直線的であることがわかる．このように，ひずみが小さい範囲では近似的に応力とひずみは線形関係にあるとしてよい場合が多い．このような線形な構成関係を表すのが Hooke の法則である．以下にそれを誘導してみよう．

まず， $\tau_{11}$  だけ作用したとき ( $x_1$  軸方向の一軸引張) を考える (Fig 2.12) ．ここで， $E$  を Young 率， $\nu$  を Poisson 比 ( $0 \leq \nu < 0.5$ ) とすると，

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{1}{E} \tau_{11} \\ \epsilon_{22} &= \epsilon_{33} = -\nu \epsilon_{11} \end{aligned}$$

と書ける． $\tau_{22}$  と  $\tau_{33}$  についても同様な関係が導かれるから，三軸で引張った場合には，重ね合わせにより，

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= \frac{1}{E}\tau_{11} - \frac{\nu}{E}\tau_{22} - \frac{\nu}{E}\tau_{33} \\ &= \frac{1+\nu}{E}\tau_{11} - \frac{\nu}{E}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) \\ \epsilon_{22} &= -\frac{\nu}{E}\tau_{11} + \frac{1}{E}\tau_{22} - \frac{\nu}{E}\tau_{33} \\ &= \frac{1+\nu}{E}\tau_{22} - \frac{\nu}{E}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) \\ \epsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E}\tau_{11} - \frac{\nu}{E}\tau_{22} + \frac{1}{E}\tau_{33} \\ &= \frac{1+\nu}{E}\tau_{33} - \frac{\nu}{E}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33})\end{aligned}$$

となる．

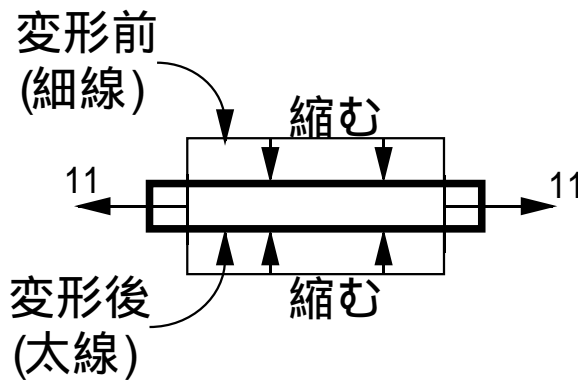


Fig 2.12  $x_1$  軸方向の一軸引張

他方， $\tau_{12}(= \tau_{21})$ ， $\tau_{23}(= \tau_{32})$ ， $\tau_{31}(= \tau_{13})$  がそれぞれ作用したとき，

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2G}\tau_{12}, \quad \epsilon_{23} = \frac{1}{2G}\tau_{23}, \quad \epsilon_{31} = \frac{1}{2G}\tau_{31}$$

となる．ここに， $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  であることを示すことができる．

以上をまとめれば，線形弾性体の構成関係は

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\tau_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \tau_{kk} \quad (2.2)$$

と表すことができる．これを Hooke の法則という．ここに， $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタと呼ばれ，

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

である．



## 2.2 はり理論 (Bernoulli-Euler のはり理論)

はりの支配微分方程式はよく知られているが、その微分方程式が三次元弾性体から出発してどのような過程を経て誘導されるかを詳しく見てみよう。

### 2.2.1 変形に関する仮定

実験事実と照らし合わせると、はりの変形に関して次の三つの仮定を設けることができる。

- 変形前に平面であったものは変形後も平面である (平面保持の仮定)。つまり、 $x_1 (= x)$  方向の変位は  $x_2$  方向に線形に分布する。したがって、この仮定は

$$u_1(x, x_2) = a(x)x_2$$

と表される。

- 断面は形を変えない (断面剛の仮定)。つまり、 $x_2$  方向変位  $u_2 (= \text{たわみ } y)$  は  $x_2$  方向に変化しない。したがって、この仮定は

$$u_2(x) = y(x)$$

と表される。

- せん断ひずみ  $\epsilon_{12}$  は零である。つまり、

$$\epsilon_{12} = 0$$

と表される。

以上の仮定より、

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left( a(x) + \frac{dy(x)}{dx} \right) = 0$$

と書けるから、

$$a(x) = -\frac{dy}{dx}$$

を得る。ゆえに、

$$u_1(x) = -\frac{dy(x)}{dx}x_2 \quad (2.3)$$

$$u_2(x) = y(x) \quad (2.4)$$

を得る。

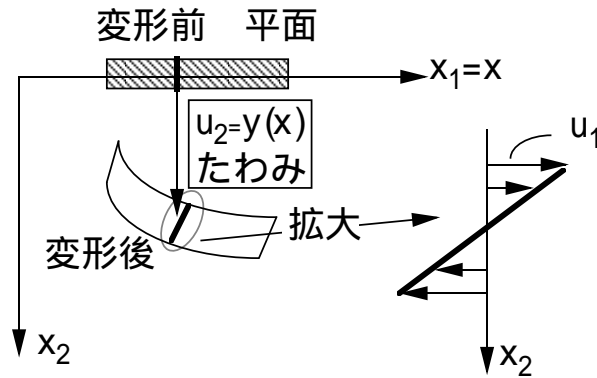


Fig 2.13 変形に関する仮定

### 2.2.2 応力に関する仮定

応力に関しては平面応力状態を仮定する．すなわち，

$$\tau_{33} = 0$$

を仮定する．さらに一軸状態を仮定する．すなわち，

$$\tau_{22} = 0$$

も仮定する．このとき式 (2.2) より，

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E}\tau_{11} - \frac{\nu}{E}(\tau_{22} + \tau_{33}) = \frac{1}{E}\tau_{11} \quad (2.5)$$

と書ける．

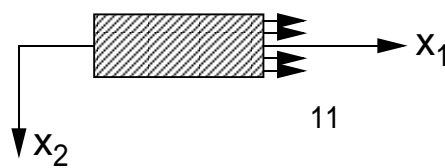


Fig 2.14 応力に関する仮定

### 2.2.3 曲げモーメント—曲率関係

はりのある断面において，その断面原点 (図心) まわりの  $\tau_{11}$  による曲げモーメント  $M$  は，式 (2.3) と式 (2.5) により，

$$\begin{aligned} M &= \int_A x_2 \tau_{11} dA = E \int_A x_2 \epsilon_{11} dA = E \int_A x_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dA \\ &= -E \int_A x_2^2 y''(x) dA = -E y'' \int_A x_2^2 dA \end{aligned}$$

と書くことができる (Fig 2.15 を参考にせよ) . ここで , 断面二次モーメント  $I$  および曲率  $\phi$  を

$$I = \int_A x_2^2 dA$$

$$\phi = -\frac{d^2y(x)}{dx^2} \quad (2.6)$$

と定義すると , 曲げモーメント  $M$  と曲率  $\phi$  の関係は ,

$$M = -EIy'' = EI\phi \quad (2.7)$$

と表される .

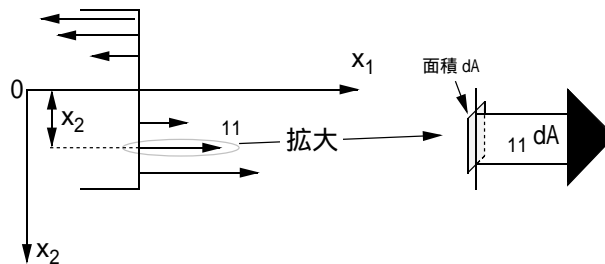


Fig 2.15 曲げモーメント

## 2.2.4 断面力・軸力のつりあい

はりの断面に働く力を断面力と呼び ,  $Q$  と表す . ここで ,  $x_1$  方向を向く面では  $x_2$  軸方向を正 ,  $-x_1$  方向を向く面では  $-x_2$  軸方向を正としておく . いま , Fig 2.16 のようなはりの微小要素の  $x_2$  方向のつりあいを考える . これに關与するのは , せん断力  $Q$  の他に横分布荷重  $p(x)$  があり ,

$$Q(x + dx) + p(x)dx - Q(x) = 0$$

を得る . これより ,  $dx \rightarrow 0$  の極限では ,

$$Q'(x) = -p(x) \quad (2.8)$$

が成立する .

他方 , 軸方向のつりあいは , 軸力  $N$  だけに注目すればよいので ,

$$N(x + dx) + N(x) = 0$$

を得る . これより ,  $dx \rightarrow 0$  の極限では ,

$$N(x) = \text{一定} \quad (2.9)$$

が成立する .

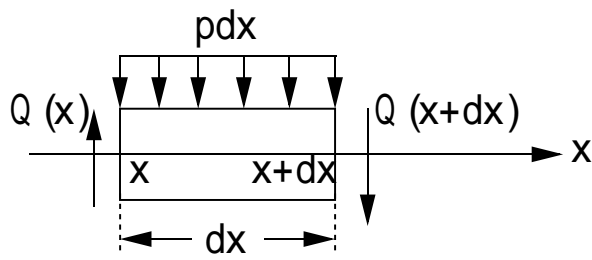


Fig 2.16 力のつりあい

### 2.2.5 モーメントのつりあい

続いて、はりの微小要素のモーメントのつりあいを考えよう。Fig 2.17 の A 点まわりの力のモーメントのつりあい式をたてると、

$$M(x + dx) + p(x)dx \frac{dx}{2} - M(x) - Q(x)dx = 0$$

を得る。これより、 $dx \rightarrow 0$  の極限では、

$$M'(x) = Q(x) \tag{2.10}$$

が成立する。

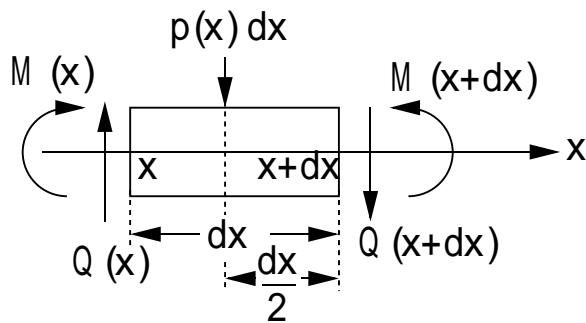
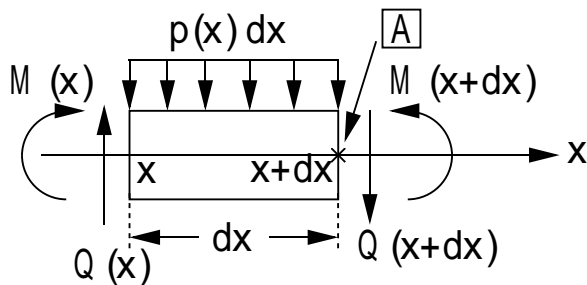


Fig 2.17 モーメントのつりあい

## 2.2.6 はりの微分方程式

以上の式 (2.7), 式 (2.8) および式 (2.10) より, はりの微分方程式

$$(EIy'')'' = p \quad (2.11)$$

が得られる.

## 2.2.7 境界条件

はりの微分方程式 (2.11) は 4 階の常微分方程式であるから, その一般解は 4 つの未知数を含んでいる. したがって, その未知数を決定するのに 4 つの境界条件が必要である. なお「4 つ」というのは, はりが 1 本の場合であって, ヒンジなどによって  $N$  本のはりが連結している場合 (Fig 2.18) には,  $4 \times N$  だけの境界条件が必要となる (境界条件のうち, はりとはりの接合部で満たされるべき条件を特に連続条件と呼ぶ).

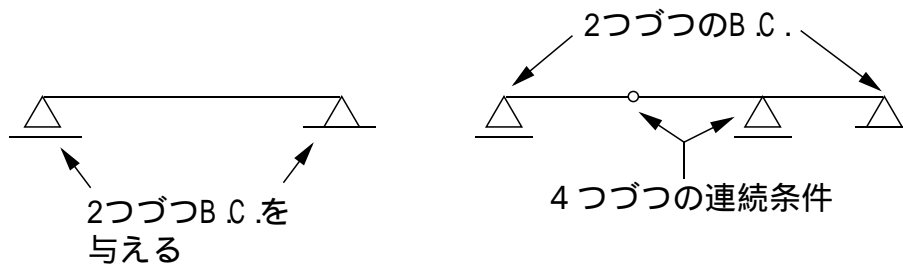


Fig 2.18 境界条件

以下に典型的な境界条件を示そう.

- 固定端

$$y = 0$$

$$y' = 0$$

- 自由端

$$M = 0 \rightarrow y'' = 0$$

$$Q = 0 \rightarrow y''' = 0$$

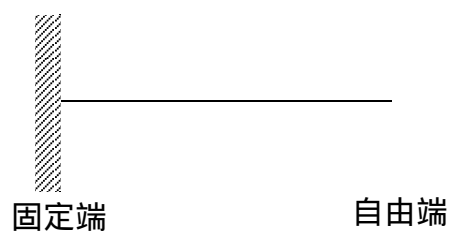


Fig 2.19 固定端と自由端

- 単純支持端

$$y = 0$$

$$M = 0 \rightarrow y'' = 0$$

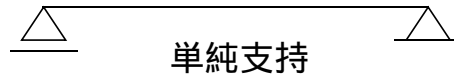


Fig 2.20 単純支持端

- ローラー端

$$y' = 0$$

$$Q = 0 \rightarrow y''' = 0$$

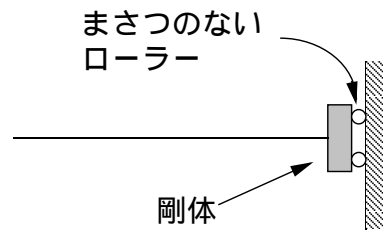


Fig 2.21 ローラー端

- 中間ヒンジ

$$y^- = y^+$$

$$M^- = 0 \rightarrow y''^- = 0$$

$$M^+ = 0 \rightarrow y''^+ = 0$$

$$Q^- = Q^+ \rightarrow y'''^- = y'''^+$$

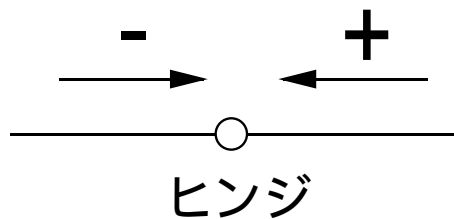


Fig 2.22 中間ヒンジ

- 中間支点

$$\begin{aligned}
 y^- &= 0 \\
 y^+ &= 0 \\
 y'^- &= y'^+ \\
 M^- &= M^+ \quad \rightarrow \quad y''^- = y''^+
 \end{aligned}$$

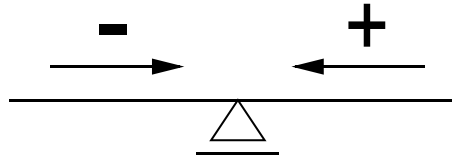


Fig 2.23 中間支点

## 2.3 仮想仕事の原理 (一本のはりの場合)

### 2.3.1 つりあい系

一本のはりの境界 (すなわち右端 (上添字  $r$ ) と左端 (上添字  $\ell$ )) に働く外力として、モーメント  $m^{\ell,r}$  (時計回りを正とする。曲げモーメント  $M^{\ell,r}$  の正負と違うので注意!) と力  $F^{\ell,r}$  を定義しておく (Fig 2.24)。これらは、はりの境界における曲げモーメント  $M$ 、軸力  $N$ 、せん断力  $F$  を用いると次のように書ける。

$$m^\ell = M^\ell, \quad m^r = -M^r, \quad \mathbf{F}^\ell = \begin{pmatrix} -N \\ -Q^\ell \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^r = \begin{pmatrix} N \\ Q^r \end{pmatrix}$$

ここで、 $M$  および  $Q$  は式 (2.8)、式 (2.9) および式 (2.10)、すなわち、

$$Q' = -p, \quad N = \text{一定}, \quad M' = Q$$

を満足していなくてはならない。以上を満たす  $(M, Q, N, \mathbf{F}^{\ell,r}, m^{\ell,r}, p)$  をつりあい系と呼ぶ。また、つりあい系であって力の境界条件を満たすものを静力学的に許容という。

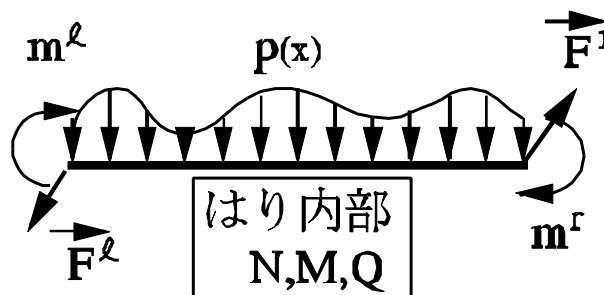


Fig 2.24 はりの境界に働く力

### 2.3.2 適合系

左端と右端の  $u_1$  は等しいという仮定を追加しておく (すなわち, はりの軸方向の伸びは零)(Fig 2.25) . また, たわみ角  $\theta$  を

$$\theta = y' \tag{2.12}$$

と定義する (外力のモーメント  $m$  に対応して時計回りを正とする) . このとき,

$$\theta^\ell = y'^\ell, \quad \theta^r = y'^r, \quad \mathbf{u}^\ell = \begin{pmatrix} u_1 \\ y^\ell \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^r = \begin{pmatrix} u_1 \\ y^r \end{pmatrix}$$

である . ここで,  $\theta$  と  $\phi$  はそれぞれ式 (2.12) と式 (2.6) すなわち,

$$\theta = y', \quad \phi = -y''$$

を満足していなくてはならない . 以上を満たす  $(y, \theta, \phi, \mathbf{u}^{\ell,r}, \theta^{\ell,r})$  を適合系と呼ぶ . また, 適合系であって変形の B.C. を満たすものを幾何学的に許容という .

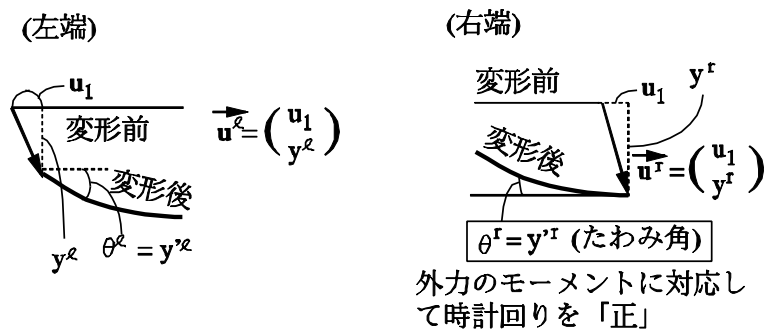


Fig 2.25 はりの境界における変形量

### 2.3.3 仮想仕事の原理

定理 仮想仕事の原理 (一本のはりの場合) :  $(M^*, Q^*, N^*, F^{*\ell,r}, m^{*\ell,r}, p^*)$  がつりあい系であり,  $(y, \theta, \phi, \mathbf{u}^{\ell,r}, \theta^{\ell,r})$  が適合系であるとする . このとき次式が成立する .

$$\sum_{\text{両端}} \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{u} + \sum_{\text{両端}} m^* \theta + \int p^* y dx = \int M^* \phi dx \tag{2.13}$$

[証明]

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \int_0^L M^* \phi dx = - \int_0^L M^* y'' dx \\ &\stackrel{\text{部分積分}}{=} - [M^* y']_0^L + \int_0^L (M^*)' y' dx \\ &\stackrel{\text{部分積分}}{=} - [M^* y']_0^L + [(M^*)' y]_0^L - \int_0^L (M^*)'' y dx \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= -M^*(L)y'(L) + M^*(0)y'(0) + Q^*(L)y(L) - Q^*(0)y(0) - \int_0^L (M^*)'' y dx \\
&= -M^*(L)y'(L) + M^*(0)y'(0) + (Q^*(L)y(L) + Nu_1) - (Nu_1 + Q^*(0)y(0)) \\
&\quad + \int_0^L p^* y dx \\
&\stackrel{(*)}{=} m^{*r}\theta^r + m^{*\ell}\theta^\ell + \mathbf{F}^{*r} \cdot \mathbf{u}^r + \mathbf{F}^{*\ell} \cdot \mathbf{u}^\ell + \int_0^L p^* y dx = \text{左辺}
\end{aligned}$$

(\*) について以下の関係を用いた .

$$\begin{aligned}
M^*(L) &= -m^{*r}, & y'(L) &= \theta^r, & M^*(0) &= m^{*\ell}, & y'(0) &= \theta^\ell, \\
\mathbf{F}^{*r} &= \begin{pmatrix} N^* \\ Q^*(L) \end{pmatrix}, & \mathbf{u}^r &= \begin{pmatrix} u_1 \\ y(L) \end{pmatrix}, & \mathbf{F}^{*\ell} &= \begin{pmatrix} -N^* \\ -Q^*(0) \end{pmatrix}, & \mathbf{u}^\ell &= \begin{pmatrix} u_1 \\ y(0) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

また ,

$$\mathbf{F}^{*r} \cdot \mathbf{u}^r = Q^*(L)y(L) + N^*u_1, \quad \mathbf{F}^{*\ell} \cdot \mathbf{u}^\ell = -Q^*(0)y(0) - N^*u_1$$

[証明終]

なお , 次の 3 点に注意されたい .

注意 1 つりあい系と適合系とは , 何らかの関係で結ばれている必要はない . 特に仮想仕事と構成関係とは無関係である .

注意 2 軸力について , 直線ばりでは多くの場合  $N = 0$  である .  $N$  は  $(\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{u})$  の第一成分にのみ関係しているので , 多くの直線ばりではこの項をおとせる . つまり ,  $\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{F}^*)_2(\mathbf{u})_2$  .

注意 3  $(\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{u})$  ,  $(m^*\theta)$  の項における諸量の正の向きは ,  $(\mathbf{F}^*, \mathbf{u})$  ,  $(m^*, \theta)$  を各々ペアにして変えてもよい .

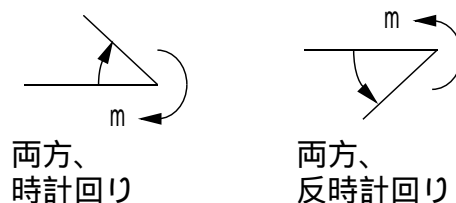


Fig 2.26 符合のペア

つまり , Fig 2.26 のように「両方、時計回り」を「両方、反時計回り」にしてもよいが、「一方は時計回り , 一方は反時計回り」にはいけない .

## 2.4 仮想仕事の原理 (ラーメンの場合, 剛結の場合)

複数のはりの結合した構造をラーメン (またはフレーム) という。これらが剛に結ばれた場合について考える。

部材  $I$  の  $(y, \theta, \phi, \mathbf{u}_{iI}, \theta_{iI})$  が適合系であるとする。ここで,  $f_{iI}$  は部材  $I$  の節点  $i$  における量  $f$  であることを意味している。さて, Fig 2.27 および Fig 2.28 からわかるように, 剛結した節点  $i$  に集まる全ての部材  $I$  について,  $\mathbf{u}_{iI}$  と  $\theta_{iI}$  はそれぞれ一定である。すなわち,

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{iI}, \quad \theta_i = \theta_{iI} \quad (2.14)$$

のように, 節点  $i$  に対して, 変位  $\mathbf{u}_i$  およびたわみ角  $\theta_i$  を定義することができる。

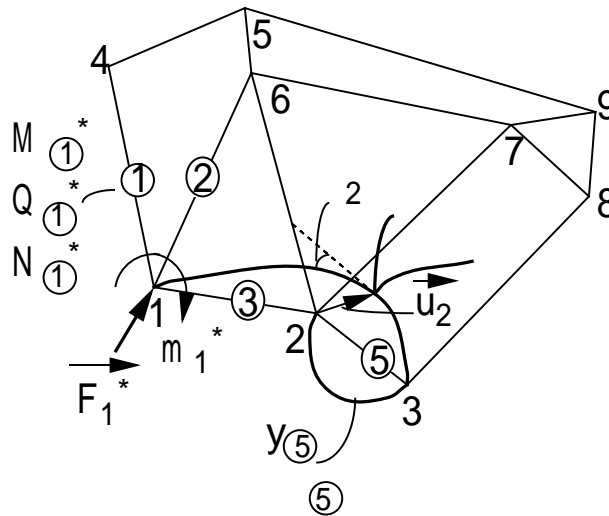


Fig 2.27 剛結された節点 2 に着目

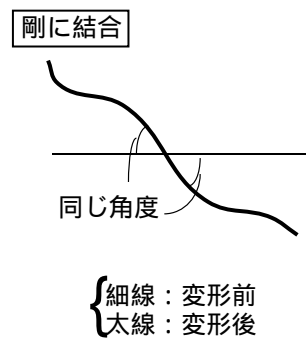


Fig 2.28 剛結

次に, 部材  $I$  の  $(M_I^*, Q_I^*, N_I^*, F_{iI}^*, m_{iI}^*, p_I^*)$  がつりあい系をなしているとする。節点  $i$  に作用する集中力を  $F_i^*$ , 集中モーメントを  $m_i^*$  として, つりあい式をたててみよう。まずは, Fig 2.29 の節点 1 について考えて見よう。この場合は,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^* + (-\mathbf{F}_{1(1)}^*) + (-\mathbf{F}_{1(2)}^*) + (-\mathbf{F}_{1(3)}^*) &= \mathbf{0} \\ m_1^* + (-m_{1(1)}^*) + (-m_{1(2)}^*) + (-m_{1(3)}^*) &= 0 \end{aligned}$$

となる。

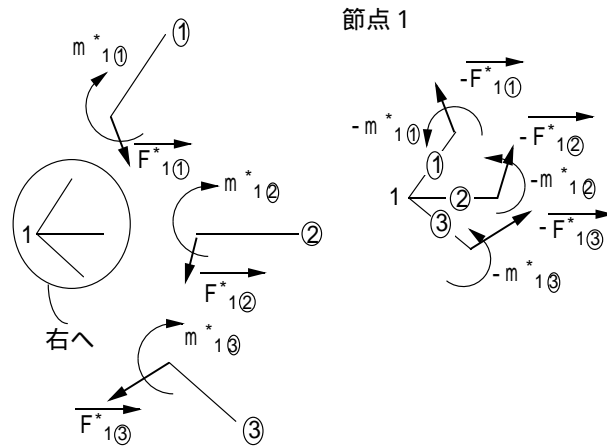


Fig 2.29 節点 1 におけるつりあい

これより明らかなように一般には，節点  $i$  について，

$$\mathbf{F}_i^* = \sum_{I: \text{節点 } i \text{ に集まる部材}} \mathbf{F}_{iI}^*, \quad m_i^* = \sum_{I: \text{節点 } i \text{ に集まる部材}} m_{iI}^* \quad (2.15)$$

というつりあい式が成立する。

定理 仮想仕事の原理 (ラーメンの場合，剛結の場合) :  $(M_I^*, Q_I^*, N_I^*, F_{iI}^*, m_{iI}^*, p_I^*)$  がつりあい系であって， $(y_I, \theta_I, \phi_I, \mathbf{u}_{iI}, \theta_{iI})$  が適合系であるとする．このとき次式が成立する．

$$\sum_i \mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{u}_i + \sum_i m_i^* \theta_i + \sum_I \int p_I^* y_I dx = \sum_I \int M_I^* \phi_I dx \quad (2.16)$$

[証明] 各部材に対して仮想仕事の原理が成立するから，

$$\int M_I^* \phi_I dx = \sum_{i: \text{部材 } I \text{ の両端}} \mathbf{F}_{iI}^* \cdot \mathbf{u}_i + \sum_{i: \text{部材 } I \text{ の両端}} m_{iI}^* \theta_i + \int p_I^* y_I dx$$

を得る．ここで，

$$\sum_{I: \text{全部材}} \left( \sum_{i: \text{部材 } I \text{ の両端}} \right) = \sum_{i: \text{全節点}} \left( \sum_{I: \text{節点 } i \text{ に集まる全部材}} \right)$$

なる関係に注意して，全部材について総和を取ると，

$$\begin{aligned} & \sum_{I: \text{全部材}} \int M_I^* \phi_I dx \\ &= \sum_{I: \text{全部材}} \left( \sum_{i: \text{部材 } I \text{ の両端}} (\mathbf{F}_{iI}^* \cdot \mathbf{u}_i + m_{iI}^* \theta_i) \right) + \sum_{I: \text{全部材}} \int p_I^* y_I dx \\ &= \sum_{i: \text{全節点}} \left\{ \left( \sum_{I: \text{節点 } i \text{ に集まる部材}} \mathbf{F}_{iI}^* \right) \cdot \mathbf{u}_i + \left( \sum_{I: \text{節点 } i \text{ に集まる部材}} m_{iI}^* \right) \theta_i \right\} + \sum_{I: \text{全部材}} \int p_I^* y_I dx \\ &= \sum_{i: \text{全節点}} (\mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{u}_i + m_i^* \theta_i) + \sum_{I: \text{全部材}} \int p_I^* y_I dx \end{aligned}$$

最後の变形には各節点で成立するつりあい式 (2.15) を使った。

## 2.5 仮想仕事の原理 (ラーメンの場合, ヒンジを含んでいる場合)

節点  $i$  がヒンジ結合 (ピン結合) である場合には, その節点に集まる部材  $I$  の端におけるたわみ角  $\theta_{iI}$  は一般には一定でないから, 節点  $i$  のたわみ角  $\theta_i$  を定義することはできない. ところが, 節点  $i$  に集中モーメント  $m_i$  を作用することはできないから  $m_i = 0$  が成立するので, 式 (2.17) の仮想仕事の原理は形式的に同じである. もう少し明示的に書くならば ( $\theta_i$  が未定義なのでキモチワルイならば), 式 (2.17) の左辺第二項の和の範囲を「ヒンジ結合でない節点に関する和」としておけばよい.

## 2.6 仮想仕事の原理の応用

ここでは, 仮想仕事の原理を応用した例として, 変位 (たわみ), たわみ角を求める方法 (単位荷重法) や不静定構造の解法について述べる.

### 変位の求め方

以下に変位を求める方法の手順を記述し, それに従って例題を解いていく.

1. 真の静力学的に許容な断面力  $M$  を求める.
2.  $M$  に構成関係を用いて, 曲率  $\phi$  を求める.

$$\left( \begin{array}{l} 2 \text{ の } \phi \text{ と変形に関する B.C. とを考慮した } \underbrace{(\phi, u, \theta, y)}_{(A)} \text{ は, K.A. でなければならない.} \end{array} \right)$$

3. 変位を求めたい点に求めたい方向へ大きさ「1」の荷重のみを作用させた時の任意のつりあい系を  $\underbrace{(F^*, m^*, p^*, M^*)}_{(B)}$  とする.

4. (A) を適合系, (B) をつりあい系として, これらの間に仮想仕事を適用する.

### たわみ角の求め方

以下にたわみ角を求める方法の手順を記述し, それに従って例題を解いていく.

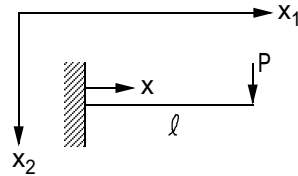
1. 真の静力学的に許容な断面力  $M$  を求める.
2.  $M$  に構成関係を用いて, 曲率  $\phi$  を求める.

$$\left( \begin{array}{l} 2 \text{ の } \phi \text{ と変形に関する B.C. とを考慮した } \underbrace{(\phi, u, \theta, y)}_{(A)} \text{ は, K.A. でなければならない.} \end{array} \right)$$

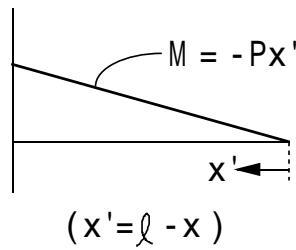
3. 変位を求めたい点に求めたい方向へ大きさ「1」の(外力の)モーメントのみを作用させた時の任意のつりあい系を  $\underbrace{(F^*, m^*, p^*, M^*)}_{(B)}$  とする .
4. (A) を適合系 , (B) をつりあい系として , これらの間に仮想仕事を適用する .

例題

下図の片持ち梁の右端に集中荷重  $P$  が作用しているときの、 $y(\ell), \theta(\ell)$  を求めよ。(  $EI$  : 一定 .  
 梁の変形に関する B.C. :  $y(0) = 0, \theta(0) = 0$  )



1. 真のつりあい系の  $M$  を求める .



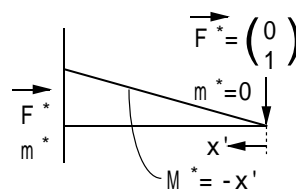
$$M = -Px'$$

2. 構成関係から  $\phi$  を求める.

$$M = EI\phi \Rightarrow \phi = -\frac{P}{EI}x'$$

• たわみ  $y(\ell)$

3. 右端に単位荷重をかけた仮想のつりあい系での  $M^*$  を計算する .



$$M^* = -x'$$

4. 真の系と仮想系に仮想仕事の原理を適用する .

$$\sum_i \underbrace{F_2^* y}_{\mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{u}_i} + \sum_i m_i^* \theta_i + \int p^* y dx = \int M^* \phi dx$$

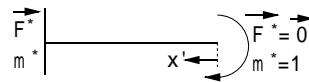
$$F_2^*(0) \underbrace{y(0)}_0 + \underbrace{F_2^*(\ell)}_1 y(\ell) + m^*(0) \underbrace{\theta(0)}_0 + \underbrace{m^*(\ell)}_0 \theta(\ell) + \int \underbrace{p^*}_0 y dx = \int M^* \phi dx$$

$$\text{一方, 右辺} = \int_0^\ell \underbrace{(-x')}_{M^*} \underbrace{\left(-\frac{P}{EI} x'\right)}_\phi dx' \text{ なので } y(\ell) = \frac{P}{3EI} \ell^3$$

(注意)  $y(0)$  等は,  $y|_{x=0}$  の意味,  $y|_{x'=0}$  ではない. 以下同様である .

• たわみ角  $\theta(\ell)$

3. 右端に単位モーメントをかけた仮想のつりあい系での  $M^*$  を計算する .



$$M^* = -1$$

4. 真の系と仮想系に仮想仕事の原理を適用する .

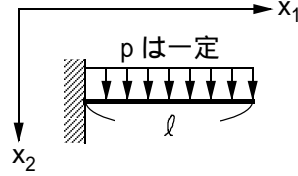
$$\sum_i \underbrace{F_2^* y}_{\mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{u}_i} + \sum_i m_i^* \theta_i + \int p^* y dx = \int M^* \phi dx$$

$$F_2^*(0) \underbrace{y(0)}_0 + \underbrace{F_2^*(\ell)}_0 y(\ell) + m^*(0) \underbrace{\theta(0)}_0 + \underbrace{m^*(\ell)}_1 \theta(\ell) + \int \underbrace{p^*}_0 y dx = \int M^* \phi dx$$

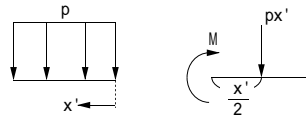
$$\text{一方, 右辺} = \int_0^\ell \underbrace{(-1)}_{M^*} \underbrace{\left(-\frac{P}{EI} x'\right)}_\phi dx' \text{ なので } \theta(\ell) = \frac{P}{2EI} \ell^2$$

例題

下図の片持ち梁に分布荷重  $p$  が作用しているときの,  $y(\ell), \theta(\ell)$  を求めよ. ( $EI$ : 一定. 梁の変形に関する B.C. :  $y(0) = 0, \theta(0) = 0$ )



1. 真のつりあい系の  $M$  を求める.



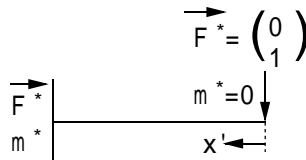
$$\text{上図より } M = -\frac{p}{2}(x')^2$$

2. 構成関係から  $\phi$  を求める.

$$M = EI\phi \Rightarrow \phi = -\frac{p}{2EI}(x')^2$$

• たわみ  $y(\ell)$

3. 右端に単位荷重をかけた仮想のつりあい系での  $M^*$  を計算する.



$$M^* = -x'$$

4. 真の系と仮想系に仮想仕事の原理を適用する.

$$\sum_i \underbrace{F_2^* y + m_i^* \theta_i}_{\mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{u}_i} + \int p^* y dx = \int M^* \phi dx$$

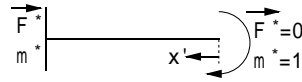
$$F_2^*(0) \underbrace{y(0)}_0 + \underbrace{F_2^*(\ell)}_1 y(\ell) + m^*(0) \underbrace{\theta(0)}_0 + \underbrace{m^*(\ell)}_0 \theta(\ell) + \int_0^\ell \underbrace{p^*}_0 y dx = \int M^* \phi dx$$

$$\text{一方, 右辺} = \int_0^\ell \underbrace{(-x')}_{M^*} \underbrace{\left(-\frac{p}{2EI}(x')^2\right)}_\phi dx' \text{ なので } y(\ell) = \frac{p}{8EI} \ell^4$$



- たわみ角  $\theta(\ell)$

3. 右端に単位モーメントをかけた仮想のつりあい系での  $M^*$  を計算する .



$$M^* = -1$$

4. 真の系と仮想系に仮想仕事の原理を適用する .

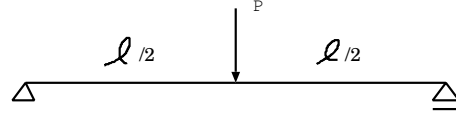
$$\sum_i \underbrace{F_i^*}_{\mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{u}_i} y + \sum_i m_i^* \theta_i + \int p^* y dx = \int M^* \phi dx$$

$$F_2^*(0) \underbrace{y(0)}_0 + \underbrace{F_2^*(\ell)}_0 y(\ell) + m^*(0) \underbrace{\theta(0)}_0 + \underbrace{m^*(\ell)}_1 \theta(\ell) + \int \underbrace{p^*}_0 y dx = \int M^* \phi dx$$

$$\text{一方, 右辺} = \int_0^\ell \underbrace{(-1)}_{M^*} \underbrace{\left(-\frac{p}{2EI}(x')^2\right)}_\phi dx' \text{ なので, } \theta(\ell) = \frac{p}{6EI} \ell^3$$

例題

下図の単純梁の中央に集中荷重  $P$  が作用しているときの,  $y(\ell/2), \theta(\ell)$  を求めよ. ( $EI$ : 一定. 梁の変形に関する B.C. :  $y(0) = y(\ell) = 0$ )



1. 真のつりあい系の  $M$  を求める.

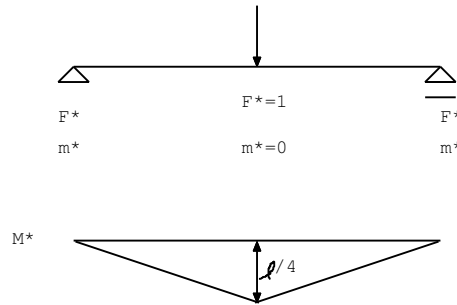
$$M = \frac{Px}{2} (0 \leq x \leq \ell/2), \frac{P(\ell-x)}{2} (\ell/2 \leq x \leq \ell)$$

2. 構成関係から  $\phi$  を求める.

$$M = EI\phi \Rightarrow \phi = \frac{Px}{2EI} (0 \leq x \leq \ell/2), \frac{P(\ell-x)}{2EI} (\ell/2 \leq x \leq \ell),$$

• たわみ  $y(\ell/2)$

3. 中央に単位荷重をかけた仮想のつりあい系での  $M^*$  を計算する.



$$M^* = \frac{x}{2} (0 \leq x \leq \ell/2), \frac{(\ell-x)}{2} (\ell/2 \leq x \leq \ell)$$

4. 真の系と仮想系に仮想仕事の原理を適用する.

$$\sum_i \underbrace{F_2^*}_i y + \sum_i m_i^* \theta_i + \int p^* y dx = \int M^* \phi dx$$

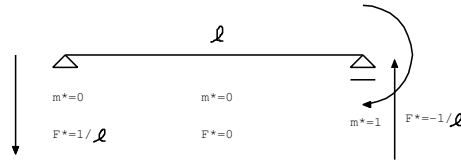
$$F_2^*(0) \underbrace{y(0)}_0 + \underbrace{F_2^*(\ell/2)}_1 y(\ell/2) + F_2^*(\ell) \underbrace{y(\ell)}_0 + \underbrace{m^*(0)}_0 \theta(0)$$

$$+ \underbrace{m^*(\ell/2)}_0 \theta(\ell/2) + \underbrace{m^*(\ell)}_0 \theta(\ell) + \int_0^{\ell/2} p^* y dx = \int M^* \phi dx$$

$$\text{一方, 右辺} = 2 \int_0^{\ell/2} \underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)}_{M^*} \underbrace{\left(\frac{Px}{2EI}\right)}_{\phi} dx \text{ なので, } y(\ell/2) = \frac{P}{48EI} \ell^3$$

- たわみ角  $\theta(\ell)$

3. 右端に単位モーメントをかけた仮想のつりあい系での  $M^*$  を計算する .



$$M^* = -\frac{x}{l}$$

4. 真の系と仮想系に仮想仕事の原理を適用する .

$$\sum_i \underbrace{F_i^*}_{\mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{u}_i} y + \sum_i m_i^* \theta_i + \int p^* y dx = \int M^* \phi dx$$

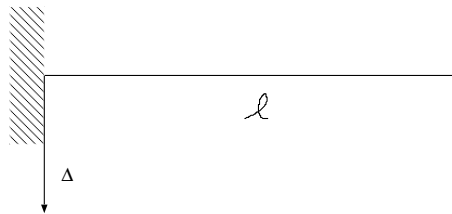
$$F_2^*(0) \underbrace{y(0)}_0 + \underbrace{F_2^*(\ell/2)}_0 y(\ell/2) + F_2^*(\ell) \underbrace{y(\ell)}_0 + \underbrace{m^*(0)}_0 \theta(0)$$

$$+ \underbrace{m^*(\ell/2)}_0 \theta(\ell/2) + \underbrace{m^*(\ell)}_1 \theta(\ell) + \int \underbrace{p^*}_0 y dx = \int M^* \phi dx$$

$$\text{一方, 右辺} = \int_0^{\ell/2} \underbrace{\left(-\frac{x}{l}\right)}_{M^*} \underbrace{\left(\frac{Px}{2EI}\right)}_{\phi} dx + \int_{\ell/2}^{\ell} \underbrace{\left(-\frac{x}{l}\right)}_{M^*} \underbrace{\left(\frac{P(\ell-x)}{2EI}\right)}_{\phi} dx \text{ なので } \theta(\ell) = \frac{-P\ell^2}{16EI}$$

### 例題

下図の片持ち梁の左端が  $\Delta$  沈下した時の ,  $y(\ell)$  を求めよ . ( $EI$  : 一定 . 梁の変形に関する B.C. :  $y(0) = \Delta, \theta(0) = 0$ )



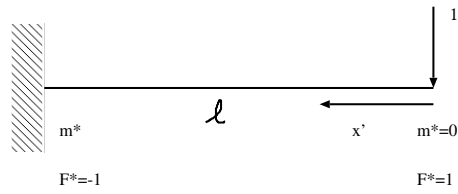
1. 真のつりあい系の  $M$  を求める .

$$M = 0$$

2. 構成関係から  $\phi$  を求める .

$$\phi = 0$$

3. 右端に単位荷重をかけた仮想のつりあい系での  $M^*$  を計算する .



$$M^* = -x'$$

4. 真の系と仮想系に仮想仕事の原理を適用する .

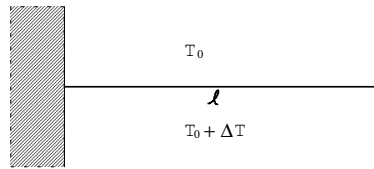
$$\sum_i \underbrace{F_2^* y}_{\mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{u}_i} + \sum_i m_i^* \theta_i + \int p^* y dx = \int M^* \phi dx$$

$$\underbrace{F_2^*(0)}_{-1} \underbrace{y(0)}_{\Delta} + \underbrace{F_2^*(l)}_1 y(l) + m^*(0) \underbrace{\theta(0)}_0 + \underbrace{m^*(l)}_0 \theta(l) + \int \underbrace{p^*}_0 y dx = \int M^* \phi dx$$

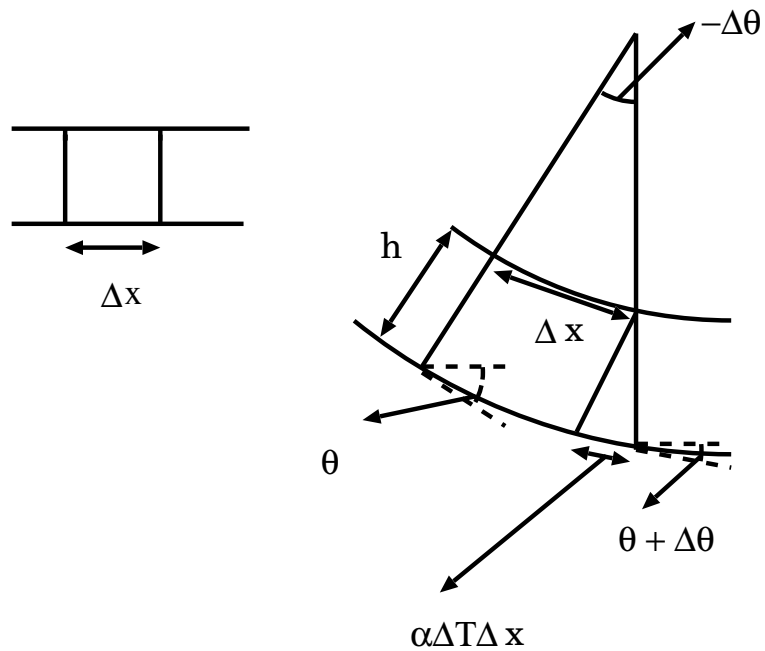
$$\text{一方, 右辺} = \int_0^l \underbrace{\phi}_0 M^* dx = 0 \text{ なので } y(l) = \Delta$$

例題

次の梁の上下に温度差  $\Delta T$  が発生した時の右端でのたわみをもとめよ。(EI : 一定 . 線膨張率  $\alpha$  . 変形に関する B.C.:  $y(0) = 0, \theta(0) = 0$ )



- 温度変化の曲率への寄与について

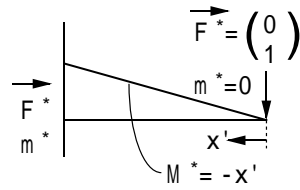


$$\begin{aligned} \text{曲率 } \phi &= -y'' = -\frac{d\theta}{dx} \text{ で右上の「膨張後」図から} \\ h(-\Delta\theta) &= \alpha\Delta T\Delta x \text{ なので,} \\ \phi &= -\frac{d\theta}{dx} = \frac{\alpha\Delta T}{h} \text{ (温度の影響による曲率)} \end{aligned}$$

1  $\phi$  の計算

$$\phi = \frac{\alpha\Delta T}{h}$$

2 仮想系の導入．たわみを求めるので，梁の右端に単位集中荷重をかける．



3 仮想系でのモーメントを計算する．

$$M^* = -x'$$

4 真の系と仮想系に仮想仕事の原理を適用する．

$$y(\ell) = \int_0^\ell \underbrace{(-x')}_{M^*} \underbrace{\left(\frac{\alpha \Delta T}{h}\right)}_{\phi} dx' = -\frac{\alpha \Delta T \ell^2}{2h}$$

## 不静定構造における解法

以下に不静定構造における解法の手順を記述し，それに従って例題を解いていく．

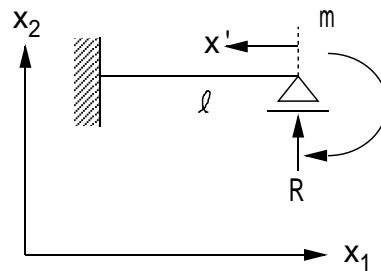
1. 真の静力学的に許容な断面力  $M$  を求める．(不静定力が未知数として含まれる．)
2.  $M$  に構成関係を用いて，曲率  $\phi$  を求める．

(2の  $\phi$  と変形に関する B.C. とを考慮した  $(\phi, u, \theta, y)$  は，適合系でなければならない)

3. 「外荷重 = 0」の任意のつりあい系を「仮想のつりあい系」とする．
4. 2の「適合系」と3の「仮想のつりあい系」との間に「仮想仕事の原理」を用いる．

### 例題

下図の反力  $R$ ， $\theta(\ell)$  を求めよ．( $EI$ ：一定．変形に関する B.C.:  $y(0) = 0, \theta(0) = 0, y(\ell) = 0$ )



1. 真のつりあい系の  $M$  を  $R$  を用いて求める．

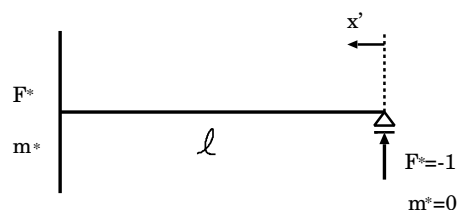
$$M = Rx' - m$$

2. 構成関係から  $\phi$  を求める．

$$M = EI\phi \Rightarrow \phi = \frac{1}{EI}(Rx' - m)$$

- 反力  $R$  を求める．

3. 外荷重=0の仮想のつりあい系での  $M^*$  を計算する．



$$M^* = x'$$

4. 真の系と仮想系に仮想仕事の原理を適用する .

$$\sum_i \underbrace{F_2^* y}_{\mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{u}_i} + \sum_i m_i^* \theta_i + \int p^* y dx = \int M^* \phi dx$$

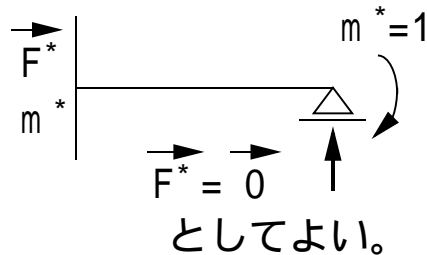
$$F_2^*(0) \underbrace{y(0)}_0 + F_2^*(\ell) \underbrace{y(\ell)}_0 + m^*(0) \underbrace{\theta(0)}_0 + m^*(\ell) \underbrace{\theta(\ell)}_0 + \int \underbrace{p^*}_0 y dx = \int M^* \phi dx$$

$$\text{一方, 右辺} = \int_0^\ell \underbrace{(x')}_{M^*} \underbrace{\left(\frac{1}{EI}(Rx' - m)\right)}_\phi dx' \text{なので,}$$

$$0 = \frac{1}{EI} \left( \frac{R}{3} \ell^3 - \frac{m}{2} \ell^2 \right) \Rightarrow R = \frac{3m}{2\ell}$$

• たわみ角  $\theta(\ell)$

3. 右端に単位モーメントをかけた仮想のつりあい系での  $M^*$  を計算する .



$$M^* = -1$$

4. 真の系と仮想系に仮想仕事の原理を適用する .

$$\sum_i \underbrace{F_2^* y}_{\mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{u}_i} + \sum_i m_i^* \theta_i + \int p^* y dx = \int M^* \phi dx$$

$$F_2^*(0) \underbrace{y(0)}_0 + F_2^*(\ell) \underbrace{y(\ell)}_0 + m^*(0) \underbrace{\theta(0)}_0 + m^*(\ell) \underbrace{\theta(\ell)}_1 + \int \underbrace{p^*}_0 y dx = \int M^* \phi dx$$

$$\text{一方, 右辺} = \int_0^\ell \underbrace{(-1)}_{M^*} \underbrace{\left(\frac{1}{EI}(Rx' - m)\right)}_\phi dx' \text{なので } \theta(\ell) = \frac{m\ell}{4EI}$$

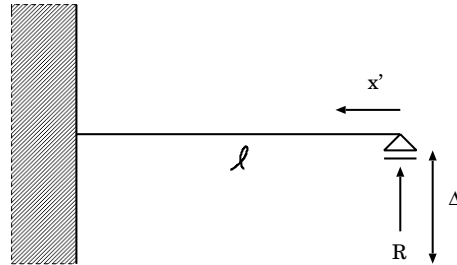
(注意)

不静定構造の単位荷重法においては仮想つりあい系は与えられた (単位集中力, 単位モーメント) の下でつり合い系をなしておりさえすればよく, できるだけ簡単なものを選ぶとよい. (e.g. 不静定力 = 0)



例題

下図の梁の右端が  $\Delta$  沈下した時の反力  $R$  とたわみ  $\theta(\ell)$  を求めよ。(  $EI$  : 一定 . 変形に関する B.C.:  $y(0) = 0, y(\ell) = \Delta, \theta(0) = 0$  )



1. 真のつりあい系の  $M$  を  $R$  を用いて求める .

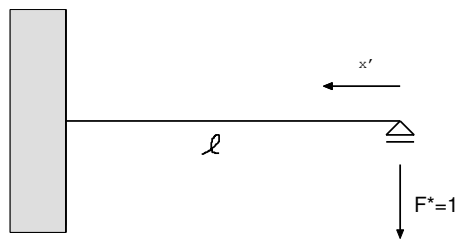
$$M = Rx'$$

2. 構成関係から  $\phi$  を求める .

$$M = EI\phi \Rightarrow \phi = \frac{Rx'}{EI}$$

- $R$  を求める .

3. 外荷重=0 の仮想のつりあい系での  $M^*$  を計算する .



$$M^* = -x'$$

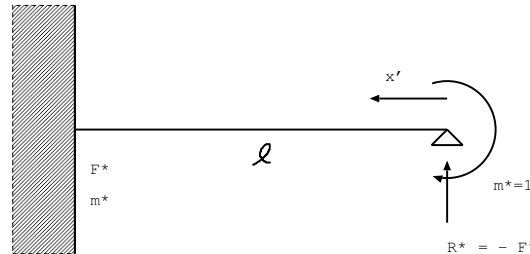
4. 真の系と仮想系に仮想仕事の原理を適用する .

$$\sum_i \underbrace{F_i^* y}_{{\mathbf{F}}_i^* \cdot \mathbf{u}_i} + \sum_i m_i^* \theta_i + \int p^* y dx = \int M^* \phi dx$$

$$\Delta = \int_0^\ell (-x') \left( \frac{Rx'}{EI} \right) dx' = \frac{-R\ell^3}{3EI} \rightarrow R = \frac{-3EI\Delta}{\ell^3} \quad (2.17)$$

- $\theta(\ell)$  を求める .

3. 右端に単位モーメントをかけた仮想のつりあい系での  $M^*$  を計算する (注意より  $R^*$  は 0 とする).



$$M^* = -1 + R^* x' = -1$$

4. 真の系と仮想系に仮想仕事の原理を適用する .

$$\sum_i \underbrace{F_i^*}_{\mathbf{F}_i^*} y + \sum_i m_i^* \theta_i + \int p^* y dx = \int M^* \phi dx$$

$$\theta(\ell) = \int_0^\ell (-1) \left( \frac{R x'}{EI} \right) dx' = \frac{-R \ell^2}{2EI} = \frac{3\Delta}{2\ell} \quad (2.18)$$

- 上では,  $R^* = 0$  において解を計算したが,  $R^* \neq 0$  とすると, どうなるのかやってみよう. この場合, 仮想仕事の原理の左辺に  $F^* \Delta(-R^* \Delta)$  が出ることに注意すると, 結局次のようになる .

$$\theta(\ell) - R^* \Delta = \int_0^\ell (-1 + R^* x') \left( \frac{R x'}{EI} \right) dx' = \underbrace{\int_0^\ell (-1) \left( \frac{R x'}{EI} \right) dx'}_{\theta(\ell) \text{ (2.18)}} - R^* \underbrace{\int_0^\ell (-x') \left( \frac{R x'}{EI} \right) dx'}_{\Delta \text{ (2.17)}}$$

この結果は明らかに  $R^*$  はどんな値をとってもよいことを示している .

## 2.7 梁におけるエネルギー原理

ここでは, エネルギー原理を用いた構造解析について述べる .

### 補ポテンシャルエネルギーの定義

補ポテンシャルエネルギーは S.A. な系 ( $\nu = (M, Q, N, \mathbf{F}, m, p)$ ) に対して次のように定義される .

$$\Pi^*(\nu) = \sum_{I: \text{全部材}} \int W_I^*(M_I) dx - \sum_{i: \text{変位が既知の節点}} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}_{0i} - \sum_{i: \text{たわみが既知の節点}} m_i \theta_{0i}$$

ここに,  $\mathbf{u}_{0i}, \theta_{0i}$  は与えられた支点変位, たわみ角である . また,  $W_I^*$  は補ひずみエネルギー密度と呼ばれ, 次のように定義される .

## 補ひずみエネルギー密度の定義

$$W^*(M) = \int \phi(M) dM$$

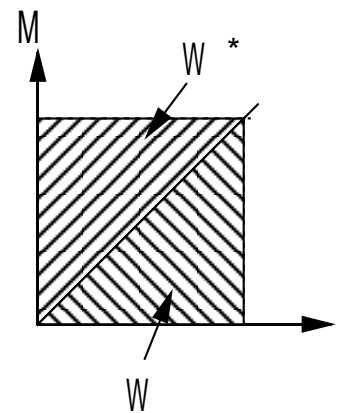
線形弾性体の場合は  $\phi$  は

$$\phi = \frac{M}{EI} (+\phi_0) \quad (\phi_0: \text{温度などの影響による曲率; 普通 } \phi_0 = 0)$$

となり,  $W^*(M)$  は次のように表される.

$$W^*(M) = \frac{M^2}{2EI} (+M \phi_0)$$

(注意) 多くの問題(支点沈下の問題以外)では,  $u_0 = 0, \theta_0 = 0$ . その場合,  $\Pi^* = \sum_I W_I^*$  となる. しかも,  $\phi_0 = 0$  となるような線形弾性体では  $W^*$  は,  $W = \int M(\phi) dx$  と値が等しい. ( $W$ : 部材のひずみエネルギー密度) 従って, この場合,  $\Pi^*$  は, 構造物の全ひずみエネルギーになる.



## 補ポテンシャルエネルギー停留原理

定理: ある不静定はり構造の S.A. な  $\nu$  を考える.  $\nu$  は不静定力  $X$  を含んでおり,  $\nu(X)$  と書ける. この時, 真の  $X$  の値は

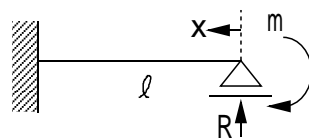
$$\frac{\partial \Pi^*(\nu(X))}{\partial X} = 0$$

より求まる.

とりあえず, 次の例題を解いてみよう.

## 例題

次の梁の反力  $R$  を求めよ. ( $EI$ : 一定. 変形に関する B.C.:  $y(0) = 0, y(\ell) = 0, \theta(0) = 0$ )



1 曲げモーメントを計算する .

$$M = Rx - m$$

2 補ポテンシャルエネルギーを計算する .

$$\begin{aligned} \Pi^* &= \frac{1}{2EI} \int_0^\ell (Rx - m)^2 dx \\ &\quad - \sum_{i:\text{変位が既知の節点}} \underbrace{(\mathbf{u}_0)_i \cdot \mathbf{F}_i}_0 - \sum_{i:\text{たわみ角が既知の節点}} \underbrace{(\theta_0)_i}_0 m_i \end{aligned}$$

3 補ポテンシャルエネルギーを微分する .

$$0 = \frac{\partial \Pi^*}{\partial R} = \frac{1}{EI} \int_0^\ell (Rx - m) x dx = \frac{1}{EI} \left( \frac{R}{3} \ell^3 - \frac{m}{2} \ell^2 \right) \Rightarrow R = \frac{3m}{2\ell}$$

### 補ポテンシャルエネルギー停留原理の証明

$$\frac{\partial \Pi^*(\boldsymbol{\nu}(X))}{\partial X} = \sum_{I:\text{全部材}} \int \frac{\partial W_I^*(M_I)}{\partial M_I} \frac{\partial M_I}{\partial X} dx - \sum_{i:\text{変位が既知の節点}} \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial X} \cdot \mathbf{u}_{0i} - \sum_{i:\text{たわみ角が既知の節点}} \frac{\partial m_i}{\partial X} \theta_{0i}$$

ここに , 関係式

$$W^*(M) = \int \phi(M) dM \rightarrow \frac{\partial W^*(M)}{\partial M} = \phi(M)$$

を使うと , 次のように書き換えられる .

$$\frac{\partial \Pi^*(\boldsymbol{\nu}(X))}{\partial X} = \sum_{I:\text{全部材}} \int \phi_I(M_I) \frac{\partial M_I}{\partial X} dx - \sum_{i:\text{変位が既知の節点}} \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial X} \cdot \mathbf{u}_{0i} - \sum_{i:\text{たわみ角が既知の節点}} \frac{\partial m_i}{\partial X} \theta_{0i}$$

節点に与えられている  $\mathbf{F}, m, p$  は不静定力  $X$  とは無関係であるから ,

$$\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial X} = 0 \quad (i : \text{力が与えられている節点}) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial m_j}{\partial X} = 0 \quad (j : \text{モーメントが与えられている節点}) \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial p_I}{\partial X} = 0 \quad (I : \text{分布荷重が与えられている部材}) \quad (2.21)$$

が言えるので , 補ポテンシャルエネルギーを不静定力で偏微分した式は

$$\frac{\partial \Pi^*(\boldsymbol{\nu}(X))}{\partial X} = \sum_{I:\text{全部材}} \int \phi_I(M_I) \frac{\partial M_I}{\partial X} dx - \sum_{i:\text{全節点}} \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial X} \cdot \mathbf{u}_i - \sum_{i:\text{全節点}} \frac{\partial m_i}{\partial X} \theta_i - \sum_{I:\text{全部材}} \int \frac{\partial p_I}{\partial X} y dx \quad (2.22)$$

となる . 正解では  $(\phi, \mathbf{u}, \theta, y)$  は適合系をなし ,  $(\frac{\partial M}{\partial X}, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial X}, \frac{\partial m}{\partial X}, \frac{\partial p}{\partial X})$  は釣り合い系をなす . よって , (2.22) はその 2 つの系に適用した仮想仕事の原理より 0 となり ,

$$\frac{\partial \Pi^*(\boldsymbol{\nu}(X))}{\partial X} = 0$$

が導かれる .

$(\frac{\partial M}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial m}{\partial X})$  は釣り合い系をなす理由

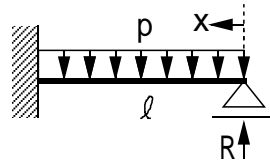
$$\frac{\partial M''}{\partial X} = -\frac{\partial p}{\partial X} = 0$$

と (2.19), (2.20) より,  $(\frac{\partial M}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial m}{\partial X})$  は荷重 0 の釣り合い系をなしていると言える.

(注意) 正解においては  $\Pi^*$  は停留である (第一変分が 0). さらに,  $\phi - M$  関係が単調増加 (第二変分が正) なら正解においては  $\Pi^*$  は最小になっている. これより, 補ポテンシャルエネルギー停留原理は最小仕事の原理ともよばれる.

### 例題

次の梁の反力  $R$  を求めよ. ( $EI$ : 一定. 変形に関する B.C.:  $y(0) = 0, y(\ell) = 0, \theta(0) = 0$ )



- 1 モーメントを計算する.

$$M = Rx - \frac{p}{2}x^2$$

- 2 補ポテンシャルエネルギーを求める.

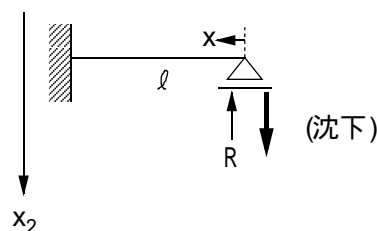
$$\Pi^* = \frac{1}{2EI} \int_0^\ell \left( Rx - \frac{p}{2}x^2 \right)^2 dx$$

- 3 補ポテンシャルエネルギーを微分する.

$$0 = \frac{\partial \Pi^*}{\partial R} = \frac{1}{EI} \int_0^\ell \left( Rx - \frac{p}{2}x^2 \right) x dx = \frac{1}{EI} \left( \frac{R}{3}\ell^3 - \frac{p}{8}\ell^4 \right) \Rightarrow R = \frac{3}{8}p\ell$$

### 例題

次の梁の反力  $R$  を求めよ. ( $EI$ : 一定. 変形に関する B.C.:  $y(0) = 0, y(\ell) = 0, \theta(0) = 0$ )



1 モーメントを計算する .

$$M = Rx$$

2 補ポテンシャルエネルギーを計算する .

$$\Pi^* = \frac{1}{2EI} \int_0^\ell (Rx)^2 dx - \underbrace{(-R)\Delta}_{\text{右端での } (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{F})}$$

3 補ポテンシャルエネルギーを微分する .

$$0 = \frac{\partial \Pi^*}{\partial R} = \frac{1}{EI} \left( \frac{R}{3} \ell^3 \right) + \Delta \text{ より } \Rightarrow R = -\frac{3\Delta EI}{\ell^3}$$

### Castigliano の定理

定理 : 不静定構造においては, 不静定力がすでに求められているものとする. このとき, 真の力のつりあい系を  $\nu = (M, Q, N, p, m, \mathbf{F})$  とする. また, 変位 (たわみ角) を求めたい点に求めたい方向に大きさ 1 の集中力 (集中モーメント) のみ作用させた任意のつりあい系を  $\nu^* = (M^*, Q^*, N^*, p^*, m^*, \mathbf{F}^*)$  とする. このとき, 求める変位 (たわみ角) は次式で計算される .

$$\left. \frac{\partial \Pi^*(\nu + X\nu^*)}{\partial X} \right|_{X=0}$$

(注意)  $(\nu + X\nu^*)$  とは, 静定構造においては「与えられた荷重」+「変位 (たわみ角) を求めたい点に大きさ  $X$  の集中力 (モーメント)」が同時に働いた時の部材力および節点力である . また, ここでの  $X$  は不静定力とは別である .

(証明)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^*(\nu + X\nu^*)}{\partial X} &= \sum_I \int \frac{\partial W_I^*(M_I + XM_I^*)}{\partial X} dx - \sum_{i: \text{変位が既知の節点}} (\mathbf{u}_0)_i \cdot \frac{\partial (\mathbf{F}_i + X\mathbf{F}_i^*)}{\partial X} \\ &\quad - \sum_{i: \text{たわみ角が既知の節点}} (\theta_0)_i \frac{\partial (m_i + Xm_i^*)}{\partial X} \\ &= \sum_I \int \frac{\partial W_I^*(M_I + XM_I^*)}{\partial M_I} M_I^* dx - \sum_{i: \text{変位が既知の節点}} (\mathbf{u}_0)_i \cdot \mathbf{F}_i^* \\ &\quad - \sum_{i: \text{たわみ角が既知の節点}} (\theta_0)_i m_i^* \end{aligned}$$

ここに,  $X = 0$  を代入すると,

$$\frac{\partial \Pi^*(\nu)}{\partial X} = \sum_I \int \underbrace{\frac{\partial W_I^*(M_I)}{\partial M_I}}_{\phi_I(M_I)} M_I^* dx - \sum_{i: \text{変位が既知の節点}} (\mathbf{u}_0)_i \cdot \mathbf{F}_i^* \quad (2.23)$$

$$- \sum_{i: \text{たわみ角が既知の節点}} (\theta_0)_i m_i^* \quad (2.24)$$

$\nu$  と  $\nu^*$  に仮想仕事の原理を適用すると，

$$\sum_I \int \phi_I M_I^* dx = \sum_{i:\text{全節点}} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{F}_i^* + \sum_{i:\text{全節点}} \theta_i m_i^* + \sum_I \int y_I p_I^* dx$$

上の式において， $\nu^*$  では集中荷重のみ存在するので  $p_I = 0$  となるので，

$$\sum_I \int \phi_I M_I^* dx = \sum_{i:\text{全節点}} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{F}_i^* + \sum_{i:\text{全節点}} \theta_i m_i^*$$

と書き換えられる．これを (2.24) に代入すると，

$$\left. \frac{\partial \Pi^*(\nu + X\nu^*)}{\partial X} \right|_{X=0} = \sum_{i:\text{変位が未知の節点}} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{F}_i^* + \sum_{i:\text{たわみ角が未知の節点}} \theta_i m_i^*$$

変位 (たわみ角) が未知の節点では  $\nu^*$  で力 (モーメント) が与えられている． $\nu^*$  では変位 (たわみ角) を求めたい点 (当然，そこでは変位 (たわみ角) は未知) に単位集中荷重 (集中モーメント) が与えられているので，上式の右辺には載荷点での変位 (たわみ角) が出てくる．

(注意)

与えられた問題が，ある集中荷重  $P$  (集中モーメント  $m$ ) を含んでいるとき， $P$  方向の変位 ( $m$  方向のたわみ角) は，次式で求められる．

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial P}, \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial m}$$

(証明)

今，不静定力  $X_i$  と荷重  $P_i$  が作用している時のモーメントは重ねあわせの原理より

$$M(x) = \sum_i M_i^{(1)}(x) X_i + \sum_i M_i^{(2)}(x) P_i$$

と書ける．

$$\frac{\partial M}{\partial P_i} = M_i^{(2)}(x)$$

と  $M_i^{(2)}(x)$  は  $P_i = 1, P_i$  以外の節点  $= 0, X_{\text{全不静定力}} = 0$  の時のモーメントであることを例にとって考えてみると，実は  $\frac{\partial \nu}{\partial P_i}$  は荷重の作用点に，作用方向に大きさ 1 の集中力が作用したときのつりあい系 ( $\nu_i^*$ ) をなしていることが言える．よって，

$$\nu = \begin{pmatrix} M \\ \mathbf{F} \\ m \\ p \end{pmatrix} = \sum_i \begin{pmatrix} M_i^{(1)} \\ \mathbf{F}_i^{(1)} \\ m_i^{(1)} \\ p_i^{(1)} \end{pmatrix} X_i + \sum_i \begin{pmatrix} M_i^* \\ \mathbf{F}_i^* \\ m_i^* \\ p_i^* \end{pmatrix} P_i = \nu_0 + \sum_i \nu_i^* P_i$$

と書ける．今  $P_j$  方向の変位を求めることを考える．この時，仮想のつりあい系として  $\nu_j^*$  をとる事が出来るので，次の式が導かれる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^*}{\partial X} (\nu_0 + \sum_i \nu_i^* P_i + X \nu_j^*) \Big|_{X=0} &= \frac{\partial \Pi^*}{\partial X} ((P_j + X) \nu_j^* + \nu_0 + \sum_{i \neq j} \nu_i^* P_i) \Big|_{X=0} = \\ \frac{\partial \Pi^*}{\partial P_j} ((P_j + X) \nu_j^* + \nu_0 + \sum_{i \neq j} \nu_i^* P_i) \Big|_{X=0} &= \frac{\partial \Pi^*}{\partial P_j} (P_j \nu_j^* + \nu_0 + \sum_{i \neq j} \nu_i^* P_i) = \frac{\partial \Pi^*}{\partial P_j} (\nu) \end{aligned}$$

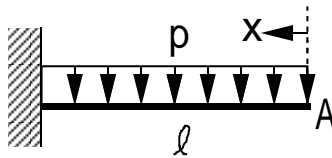
$\nu_j^*, P_j$  をそれぞれ  $\nu^*, P$  とおけば

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial X} (\nu + X \nu^*) \Big|_{X=0} = \frac{\partial \Pi^*}{\partial P} (\nu)$$

が得られる． $\frac{\partial \Pi^*}{\partial m} (\nu)$  についても同様に証明できる．

### 例題

次の梁の A 点でのたわみ，たわみ角を求めよ．( $EI$  : 一定，変形に関する B.C.:  $y(0) = 0, \theta(\ell) = 0$ )



- 1 モーメントの計算をする．

$$M = -\frac{px^2}{2}$$

- たわみを求める．
- 2 仮想系を導入する．たわみを計算するので梁の右端に単位集中荷重をかける．

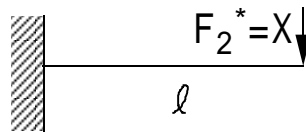


Fig 2.30 たわみを求めるための仮想系

- 3 仮想系でのモーメントを計算する．

$$M^* = -Xx$$

- 4  $\Pi^*$  を計算する．

$$\Pi^* = \frac{1}{2EI} \int_0^\ell \left( -\frac{p}{2}x^2 + (-Xx) \right)^2 dx$$



5 Castigliano の定理よりたわみを計算する .

$$\left. \frac{\partial \Pi^*}{\partial X} \right|_{X=0} = \frac{p\ell^4}{8EI}$$

• たわみ角を求める .

2 仮想系を導入する . たわみ角を計算するので梁の右端に単位集中モーメントをかける .

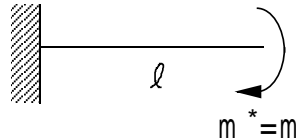


Fig 2.31 たわみ角を求めるための仮想系

3 仮想系でのモーメントを計算する .

$$M^* = -m$$

4  $\Pi^*$  を計算する .

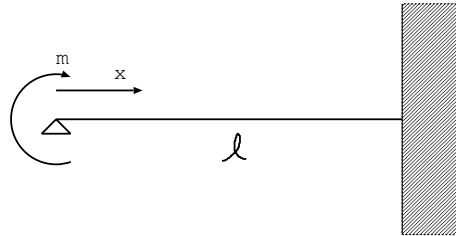
$$\Pi^* = \frac{1}{2EI} \int_0^\ell \left\{ -\frac{p}{2}x^2 + (-m) \right\}^2 dx$$

5 Castigliano の定理によってたわみ角を計算する .

$$\left. \frac{\partial \Pi^*}{\partial m} \right|_{m=0} = \frac{p\ell^3}{6EI}$$

## 例題

下図の片持ち梁の左端に集中モーメント  $m$  が作用している時の、 $\theta(0)$  を求めよ。(EI : 一定、梁の変形に関する B.C. :  $y(0) = 0, y(\ell) = 0, \theta(\ell) = 0$ )



1 モーメントを計算する .

$$M = m + Rx$$

2 補ポテンシャルエネルギーを求める .

$$\Pi^* = \int_0^\ell \frac{(m + Rx)^2}{2EI} dx$$

3 補ポテンシャルエネルギー停留原理より  $R$  を求める .

$$0 = \frac{\partial \Pi^*}{\partial R} = \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial R} \frac{(m + Rx)^2}{2EI} dx = \int_0^\ell \frac{(m + Rx)x}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left( \frac{m\ell^2}{2} + \frac{R\ell^3}{3} \right) \\ \Rightarrow R = -\frac{3m}{2\ell}$$

4 Castigliano の定理より  $\theta(0)$  を求める .

•  $R = -\frac{3m}{2\ell}$  として  $\frac{\partial \Pi^*}{\partial m}$  を計算する .

$$\theta(\ell) = \frac{\partial \Pi^*}{\partial m} = \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial m} \frac{(m - \frac{3m}{2\ell}x)^2}{2EI} dx = \frac{m}{EI} \int_0^\ell \left( 1 - \frac{3x}{2\ell} \right)^2 dx = \frac{m\ell}{4EI} \quad (2.25)$$

•  $R$  は  $m$  と無関係として  $\frac{\partial \Pi^*}{\partial m}$  を計算する .

$$\theta(\ell) = \frac{\partial \Pi^*}{\partial m} = \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial m} \frac{(m + Rx)^2}{2EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^\ell (m + Rx) dx = \frac{m\ell}{4EI} \quad (2.26)$$

(注意) 何故、上のような事が起こるのか? (2.25) は全微分  $\frac{d\Pi^*}{dm}$  で (2.26) は偏微分  $\frac{\partial \Pi^*}{\partial m}$  でありそれが等しくなっている . 理由は以下の通り .

$$\frac{d\Pi^*}{dm} = \frac{\partial \Pi^*}{\partial m} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial R} \frac{dR}{dm} = \frac{\partial \Pi^*}{\partial m} \quad (\because \text{補ポテンシャルエネルギー原理より } \frac{\partial \Pi^*}{\partial R} = 0)$$

結局次のことが言える .

Castigliano の定理を不静定構造に用いて、 $\frac{\partial \Pi^*}{\partial m}, \frac{\partial \Pi^*}{\partial P}$  によって変形を求める場合、不静定力は  $P, m$  によらないと思って微分してよい .

## 2.8 梁における相反定理

### 2.8.1 相反定理

#### 相反定理

ある線形弾性はり構造物の2つの解

$$\text{系 (1)} \left( \underbrace{\mathbf{F}^{(1)}, m^{(1)}, p^{(1)}, M^{(1)}, Q^{(1)}, N^{(1)}}_{\text{つりあい系}}, \underbrace{\mathbf{u}^{(1)}, \theta^{(1)}, y^{(1)}, \phi^{(1)}}_{\text{適合系}} \right),$$

$$\text{系 (2)} \left( \underbrace{\mathbf{F}^{(2)}, m^{(2)}, p^{(2)}, M^{(2)}, Q^{(2)}, N^{(2)}}_{\text{つりあい系}}, \underbrace{\mathbf{u}^{(2)}, \theta^{(2)}, y^{(2)}, \phi^{(2)}}_{\text{適合系}} \right),$$

があったとすると、これらは、力学的に S.A. かつ幾何学的に K.A. で、しかも、線形の構成関係 ( $M^{(i)} = EI\phi^{(i)}$  [ $i=1,2$ ]) を満たしている。このとき、次式が成立する。

$$\begin{aligned} & \sum_i \mathbf{F}_i^{(1)} \cdot \mathbf{u}_i^{(2)} + \sum_i m_i^{(1)} \theta_i^{(2)} + \sum_I \int p_I^{(1)} y_I^{(2)} dx \\ &= \sum_i \mathbf{F}_i^{(2)} \cdot \mathbf{u}_i^{(1)} + \sum_i m_i^{(2)} \theta_i^{(1)} + \sum_I \int p_I^{(2)} y_I^{(1)} dx \end{aligned}$$

(証明)

系 (1) をつりあい系、系 (2) を適合系としたときの仮想仕事の原理より、

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(1)} \cdot \mathbf{u}_i^{(2)} + \sum_i m_i^{(1)} \theta_i^{(2)} + \sum_I \int p_I^{(1)} y_I^{(2)} dx = \sum_I \int M_I^{(1)} \phi_I^{(2)} dx \quad (2.27)$$

構成関係より、

$$\sum_I \int M_I^{(1)} \phi_I^{(2)} dx = \sum_I \int (EI I_I \phi_I^{(1)}) \phi_I^{(2)} dx = \sum_I \int \phi_I^{(1)} (EI I_I \phi_I^{(2)}) dx = \sum_I \int M_I^{(2)} \phi_I^{(1)} dx \quad (2.28)$$

系 (1) を適合系、系 (2) をつりあい系としたときの仮想仕事の原理より、

$$\sum_I \int M_I^{(2)} \phi_I^{(1)} dx = \sum_i \mathbf{F}_i^{(2)} \cdot \mathbf{u}_i^{(1)} + \sum_i m_i^{(2)} \theta_i^{(1)} + \sum_I \int p_I^{(2)} y_I^{(1)} dx \quad (2.29)$$

(2.27), (2.28), (2.29) より

$$\begin{aligned} & \sum_i \mathbf{F}_i^{(1)} \cdot \mathbf{u}_i^{(2)} + \sum_i m_i^{(1)} \theta_i^{(2)} + \sum_I \int p_I^{(1)} y_I^{(2)} dx \\ &= \sum_i \mathbf{F}_i^{(2)} \cdot \mathbf{u}_i^{(1)} + \sum_i m_i^{(2)} \theta_i^{(1)} + \sum_I \int p_I^{(2)} y_I^{(1)} dx \end{aligned}$$

(注) 相反性は、構成関係の線形性の仮定の上で成り立っている。

仮想仕事	→	構成関係によらない	↑	一般
エネルギー原理	→	弾性体でのみ適用可 (非線形も可)		
相反性	→	線形弾性体でのみ適用可	↓	特殊

## 相反定理の応用

相反定理を応用することによって、たわみや支点反力の影響線を求める (Müller-Breslau の方法) ことが出来る。

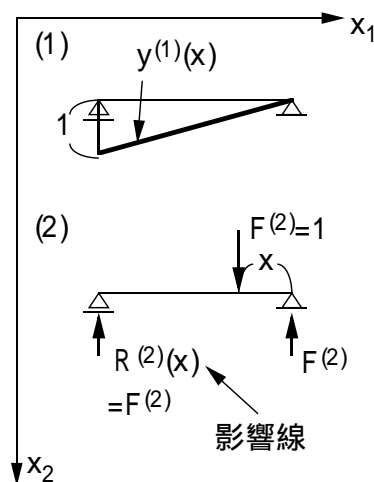
点 A のたわみの影響線 ⇒ 走行路上の点に単位荷重のみが作用した時の点 A のたわみを荷重点にプロットしたもの。

支点 B の反力の影響線 ⇒ 走行路上の点に単位荷重のみが作用した時の支点 B の反力を荷重点にプロットしたもの。

## 反力の影響線を求める際の Müller-Breslau の方法

ある支点反力の影響線はその構造物に荷重 = 0 を与え、考える支点を下方に 1 だけ変位させたときの走行路の形状に等しい。

(証明) 図の場合について証明する。



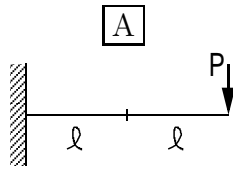
$$\begin{aligned}
 & \sum_i \underbrace{F_i^{(1)}}_0 \cdot \mathbf{u}_i^{(2)} + \sum_i \underbrace{m_i^{(1)}}_0 \theta_i^{(2)} + \sum_I \int_0^1 \underbrace{p_I^{(1)}}_0 y_I^{(2)} dx \\
 = & \sum_i \mathbf{F}_i^{(2)} \cdot \mathbf{u}_i^{(1)} + \sum_i \underbrace{m_i^{(2)}}_0 \theta_i^{(1)} + \sum_I \int_0^1 \underbrace{p_I^{(2)}}_0 y_I^{(1)} dx \\
 \text{左辺} & = 0 \\
 \text{右辺} & = \underbrace{1 \cdot (-R^{(2)}(x))}_{\text{左端}} + \underbrace{y^{(1)} \cdot 1}_{\text{単位荷重の作用点}} + \underbrace{0}_{\text{右端}} \\
 & \text{従って } R^{(2)}(x) = y^{(1)}(x)
 \end{aligned}$$

## たわみの影響線を求める際の Müller-Breslau の方法

ある点のたわみの影響線は、その構造物に考える点に大きさ 1 の集中荷重を作用させたときの走行路のたわみに等しい。

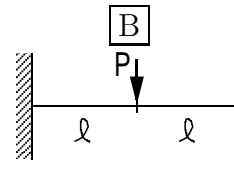
⇒ これは、「はり構造の点 A に荷重 P が作用した時の点 B のたわみ」  
 が「はり構造の点 B に荷重 P が作用した時の点 A のたわみ」に等しいことを意味している。

(例証)



$EI$  一定

問：中点のたわみを求めよ。

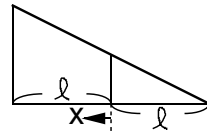


$EI$  一定

問：右端のたわみを求めよ。

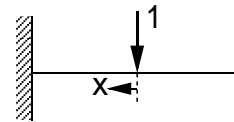
(A) について

(M 図)



$$M = -P(x + \ell)$$

$$\text{従って、たわみ } y = \int_0^\ell \left\{ \frac{-P(x + \ell)}{EI} \right\} (-x) dx = \frac{5P\ell^3}{6EI}$$



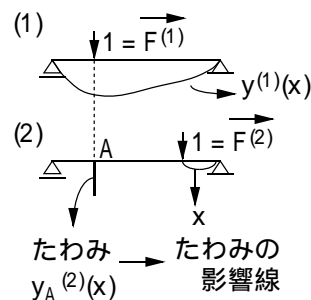
$$M^* = -x$$

(B) について

荷重点でのたわみは、 $\frac{P\ell^3}{3EI}$  で、たわみ角は、 $\frac{P\ell^2}{2EI}$   
 荷重点より右側は力が作用していないので、はり直線。  
 従って、たわみ  $y = \frac{P\ell^3}{3EI} + \frac{P\ell^2}{2EI} \ell = \frac{5P\ell^3}{6EI}$

以上のように (A), (B) の問題の解は等しくなる。

(証明) 図の場合について証明する。



相反定理から

$$\begin{aligned} & \sum_i \mathbf{F}_i^{(1)} \cdot \mathbf{u}_i^{(2)} + \sum_i \underbrace{m_i^{(1)}}_0 \theta_i^{(2)} + \sum_I \int \underbrace{p_I^{(1)}}_0 y_I^{(2)} dx \\ = & \sum_i \mathbf{F}_i^{(2)} \cdot \mathbf{u}_i^{(1)} + \sum_i \underbrace{m_i^{(2)}}_0 \theta_i^{(1)} + \sum_I \int \underbrace{p_I^{(2)}}_0 y_I^{(1)} dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1 \cdot y_A^{(2)} = 1 \cdot y^{(1)} \Rightarrow y_A^{(2)}(x) = y^{(1)}(x) \cdots \text{Müller-Breslau の方法}$$

### 拡張された相反定理

次の2つの系を考える。

系(1) 変位, たわみ角には不連続をゆるすが, 力の系 (M, Q, N) は連続であるようなはり構造の解

系(2) 今までと同様の系。これらの系には次式が成り立つ。

#### 拡張された相反定理

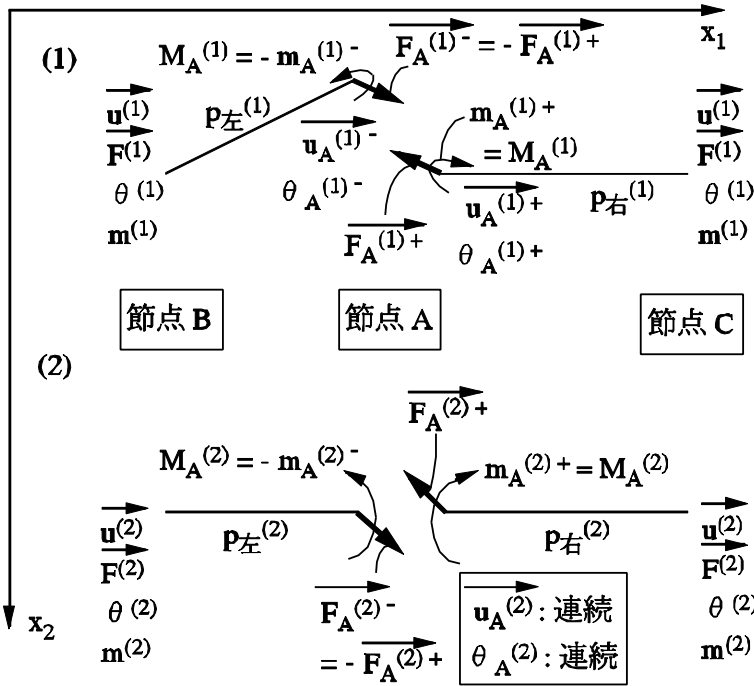
$$\begin{aligned} & \sum_i \mathbf{F}_i^{(1)} \cdot \mathbf{u}_i^{(2)} + \sum_i m_i^{(1)} \theta_i^{(2)} + \sum_I \int p_I^{(1)} y_I^{(2)} dx \\ = & \sum_i \mathbf{F}_i^{(2)} \cdot \mathbf{u}_i^{(1)} + \sum_i m_i^{(2)} \theta_i^{(1)} + \sum_I \int p_I^{(2)} y_I^{(1)} dx - N_A^{(2)} [u_1^{(1)}]_A - Q_A^{(2)} [y^{(1)}]_A + M_A^{(2)} [\theta^{(1)}]_A \end{aligned}$$

ここに  $[u_1^{(1)}]_A$  は (1) の解の不連続点 A における軸方向変位の不連続量

$[y^{(1)}]_A$  は (1) の解の不連続点 A におけるたわみの不連続量

$[\theta^{(1)}]_A$  は (1) の解の不連続点 A におけるたわみ角の不連続量

(証明) 二本のはりがつながった場合のみ証明する .



$$\theta_A^{(1)-} \neq \theta_A^{(1)+}$$

$$u_A^{(1)-} \neq u_A^{(1)+}$$

$$u_A^{(1)-} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)-} \\ y_1^{(1)-} \end{pmatrix}$$

$$u_A^{(1)+} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)+} \\ y_1^{(1)+} \end{pmatrix}$$

左のはり

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{F}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} \right)_B + \mathbf{F}_A^{(1)-} \cdot \mathbf{u}^{(2)} + \left( m^{(1)} \theta^{(2)} \right)_B + m_A^{(1)-} \theta_A^{(2)} + \int p_{\text{左}}^{(1)} y_{\text{左}}^{(2)} dx \\ = & \left( \mathbf{F}^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(1)} \right)_B + \mathbf{F}_A^{(2)-} \cdot \mathbf{u}^{(1)-} + \left( m^{(2)} \theta^{(1)} \right)_B + m_A^{(2)-} \theta_A^{(1)-} + \int p_{\text{左}}^{(2)} y_{\text{左}}^{(1)} dx \end{aligned}$$

右のはり

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{F}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} \right)_C + \mathbf{F}_A^{(1)+} \cdot \mathbf{u}^{(2)} + \left( m^{(1)} \theta^{(2)} \right)_C + m_A^{(1)+} \theta_A^{(2)} + \int p_{\text{右}}^{(1)} y_{\text{右}}^{(2)} dx \\ = & \left( \mathbf{F}^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(1)} \right)_C + \mathbf{F}_A^{(2)+} \cdot \mathbf{u}^{(1)+} + \left( m^{(2)} \theta^{(1)} \right)_C + m_A^{(2)+} \theta_A^{(1)+} + \int p_{\text{右}}^{(2)} y_{\text{右}}^{(1)} dx \end{aligned}$$

以上, 加え合わせて  $\mathbf{F}_A^{(1,2)+} = \begin{pmatrix} -N_A^{(1,2)} \\ -Q_A^{(1,2)} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{F}_A^{(1,2)-} = -\mathbf{F}_A^{(1,2)+}$

$$\mathbf{u}^{(1,2)+} = \begin{pmatrix} u_1^{(1,2)+} \\ y^{(1,2)+} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(1,2)-} = \begin{pmatrix} u_1^{(1,2)-} \\ y^{(1,2)-} \end{pmatrix}$$

$m_A^{(1,2)+} = -m_A^{(1,2)-} = M_A^{(1,2)}$  を用いると

$$\begin{aligned} & \sum \mathbf{F}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} + \sum m^{(1)} \theta^{(2)} + \sum \int p^{(1)} y^{(2)} dx \\ = & \sum \mathbf{F}^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(1)} + \sum m^{(2)} \theta^{(1)} + \sum \int p^{(2)} y^{(1)} dx \\ & -N_A^{(2)} \underbrace{\left( u_1^{(1)+} - u_1^{(1)-} \right)}_{[u_1^{(1)}]_A} - Q_A^{(2)} \underbrace{\left( y^{(1)+} - y^{(1)-} \right)}_{[y^{(1)}]_A} + M_A^{(2)} \underbrace{\left( \theta_A^{(1)+} - \theta_A^{(1)-} \right)}_{[\theta^{(1)}]_A} \end{aligned}$$

### 拡張された相反定理の応用

相反定理を応用することによって, モーメントやせん断力の影響線を求める (Müller-Breslau の方法) ことが出来る .

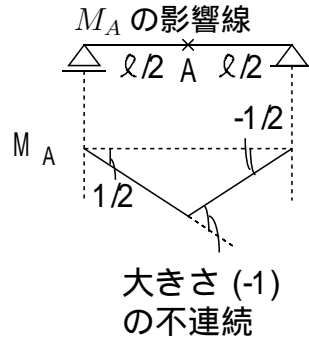
モーメントの影響線を求める際の Müller-Breslau の方法

ある点のモーメントの影響線はその点でたわみ，曲げモーメント，せん断力は連続であるが，たわみ角が大きさ-1の不連続量を有する荷重 = 0 の走行路のたわみ形状に等しい。

上の方法が正しいかどうか次の簡単な例題で確かめてみよう。

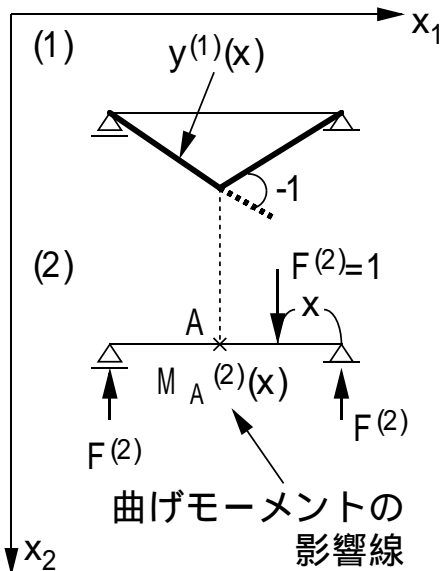
例題

次の梁の midpoint でのモーメントの影響線を求めよ。



$$\frac{x}{2} \quad \left(0 < x < \frac{\ell}{2}\right), \quad \frac{1}{2}(\ell - x) \quad \left(\frac{\ell}{2} < x < \ell\right)$$

(証明) 曲げモーメントの場合



$$\begin{aligned} & \sum_i \underbrace{F_i^{(1)}}_0 \cdot \underbrace{u_i^{(2)}}_0 + \sum_i \underbrace{m_i^{(1)}}_0 \theta_i^{(2)} + \sum_I \int \underbrace{p_I^{(1)}}_0 y_I^{(2)} dx \\ = & \sum_i F_i^{(2)} \cdot u_i^{(1)} + \sum_i \underbrace{m_i^{(2)}}_0 \theta_i^{(1)} + \sum_I \int \underbrace{p_I^{(2)}}_0 y_I^{(1)} dx \\ & - N_A^{(2)} \underbrace{[u_1^{(1)}]_A}_0 - Q_A^{(2)} \underbrace{[y^{(1)}]_A}_0 + M_A^{(2)} \underbrace{[\theta^{(1)}]_A}_{(-1)} \end{aligned}$$

左辺 = 0

右辺 =  $y^{(1)}(x) + M_A^{(2)} \times (-1)$

従って  $y^{(1)}(x) = M_A^{(2)}(x)$  : 曲げモーメントに関する結果

せん断力の影響線を求める際の Müller-Breslau の方法

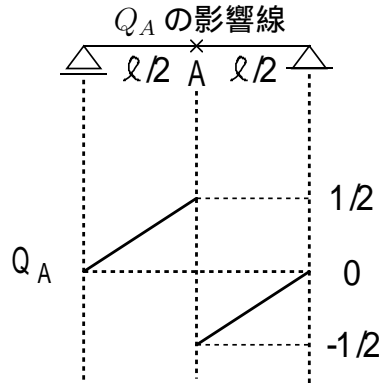
ある点のせん断力の影響線はその点でたわみ角，曲げモーメント，せん断力は連続であるが，たわみが大きさ 1 の不連続量を有する荷重 = 0 の走行路のたわみ形状に等しい。

上の方法が正しいかどうか次の簡単な例題で確かめてみよう。

例題

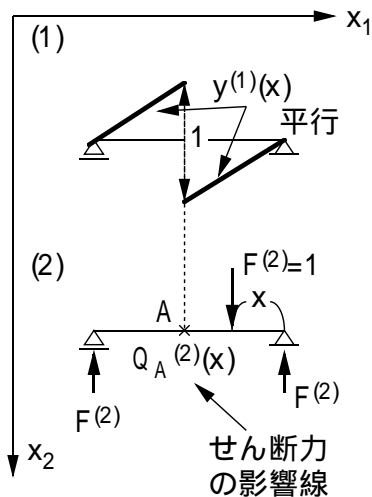


次の梁の midpoint でのせん断力の影響線を求めよ。



$$-\frac{x}{l} \quad \left(0 < x < \frac{l}{2}\right), \quad \frac{1}{l}(\ell - x) \quad \left(\frac{l}{2} < x < l\right)$$

(証明) せん断力の場合



$$\begin{aligned} & \sum_i \underbrace{\mathbf{F}_i^{(1)}}_0 \cdot \mathbf{u}_i^{(2)} + \sum_i \underbrace{m_i^{(1)}}_0 \theta_i^{(2)} + \sum_I \int \underbrace{p_I^{(1)}}_0 y_I^{(2)} dx \\ = & \sum_i \mathbf{F}_i^{(2)} \cdot \mathbf{u}_i^{(1)} + \sum_i \underbrace{m_i^{(2)}}_0 \theta_i^{(1)} + \sum_I \int \underbrace{p_I^{(2)}}_0 y_I^{(1)} dx \\ & - N_A^{(2)} \underbrace{[u_1^{(1)}]_A}_0 - Q_A^{(2)} \underbrace{[y^{(1)}]_A}_1 + M_A^{(2)} \underbrace{[\theta^{(1)}]_A}_0 \end{aligned}$$

左辺 = 0

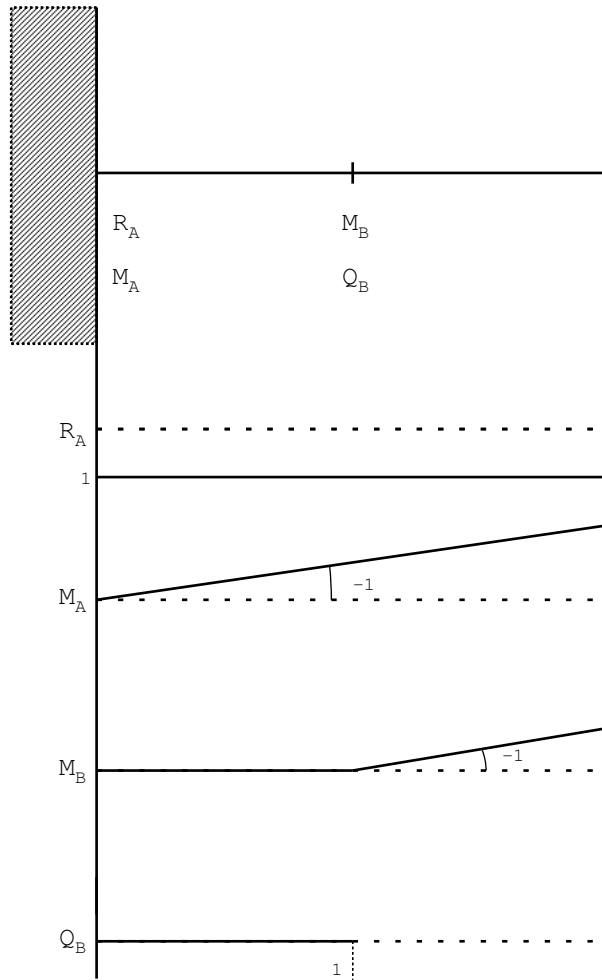
右辺 =  $y^{(1)}(x) - Q_A^{(2)}$

従って  $y^{(1)}(x) = Q_A^{(2)}(x)$  : せん断力に関する結果

(注意) 一般に静定構造の反力，モーメント，せん断力の影響線は折れ線になるが，不静定構造の場合は曲線になる．たわみの影響線は静定，不静定によらず一般に曲線になる．

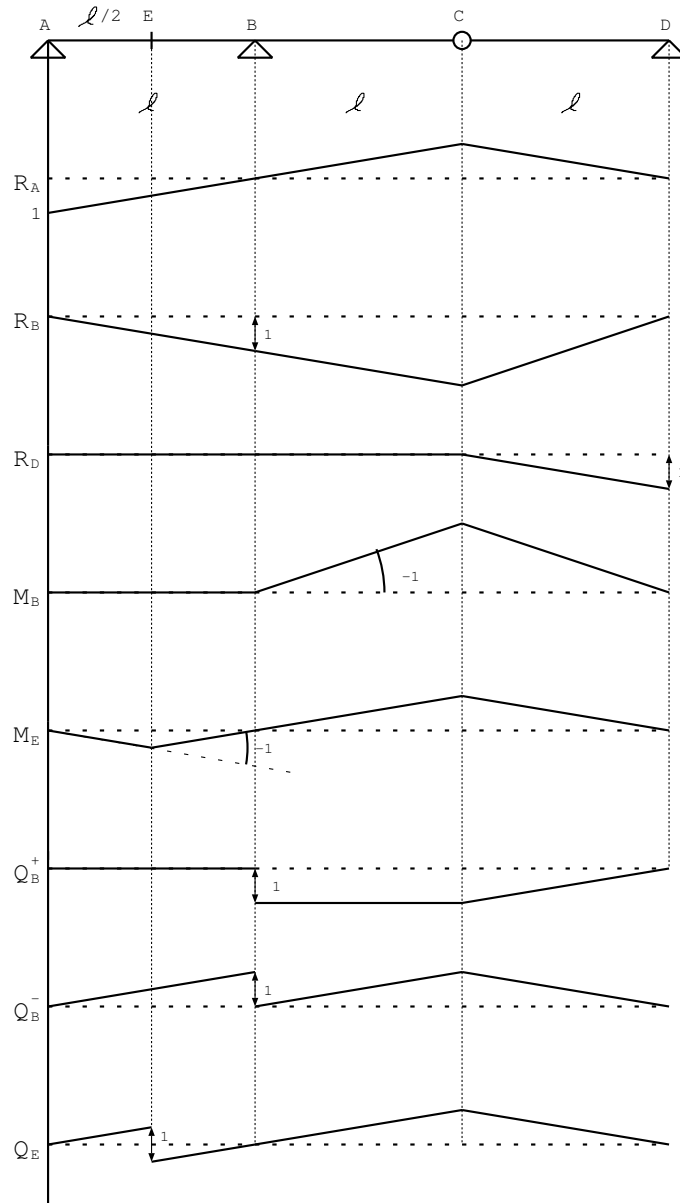
例題

次の片持ち梁の  $R_A, M_A, M_B, Q_B$  の影響線を書け.



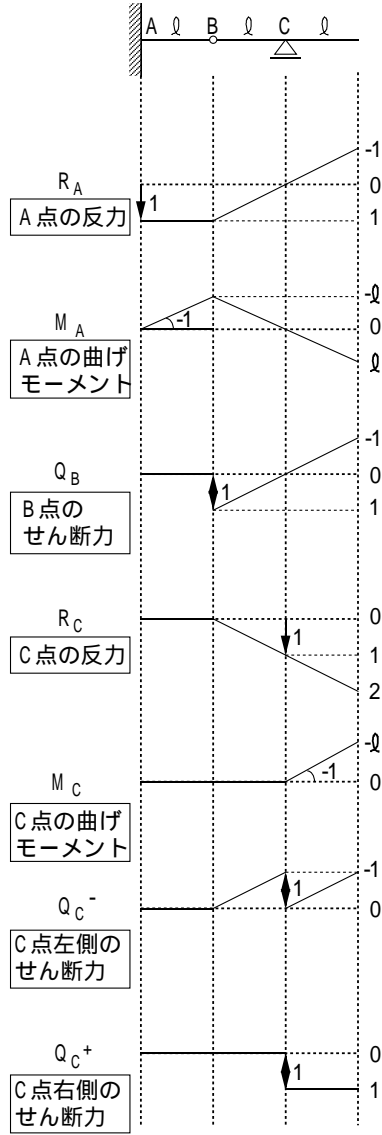
例題

次の単純梁の  $R_A, R_B, R_D, M_B, M_E, Q_B^+, Q_B^-, Q_E$  の影響線を書け.



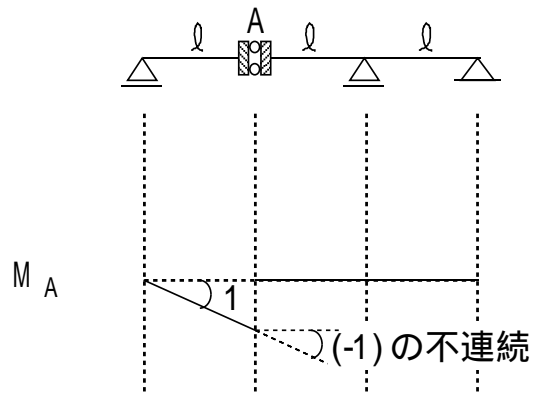
例題

次の片持ち梁の  $R_A, R_C, M_A, M_C, Q_B, Q_C^+, Q_C^-$  の影響線を書け。



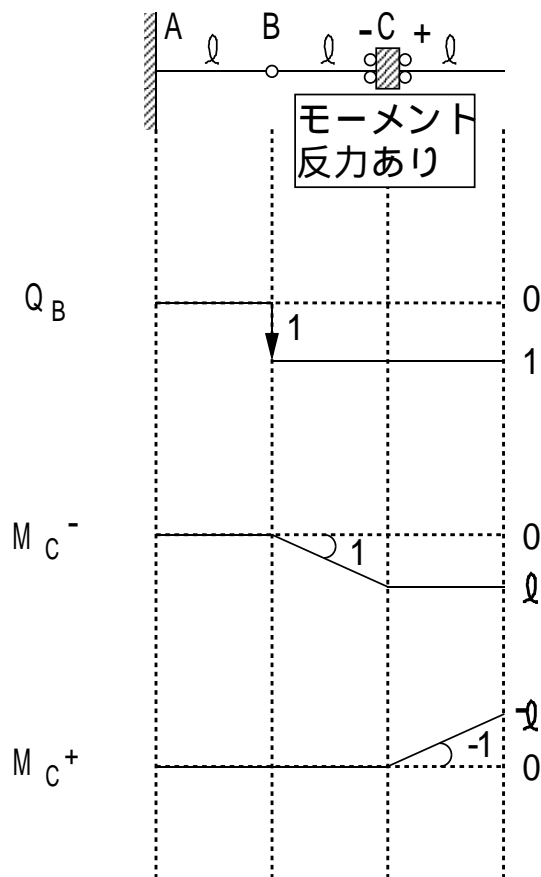
例題

次の片持ち梁の  $M_A$  の影響線を書け．



例題

次の片持ち梁の  $Q_B, M_C^+, M_C^-$  の影響線を書け．

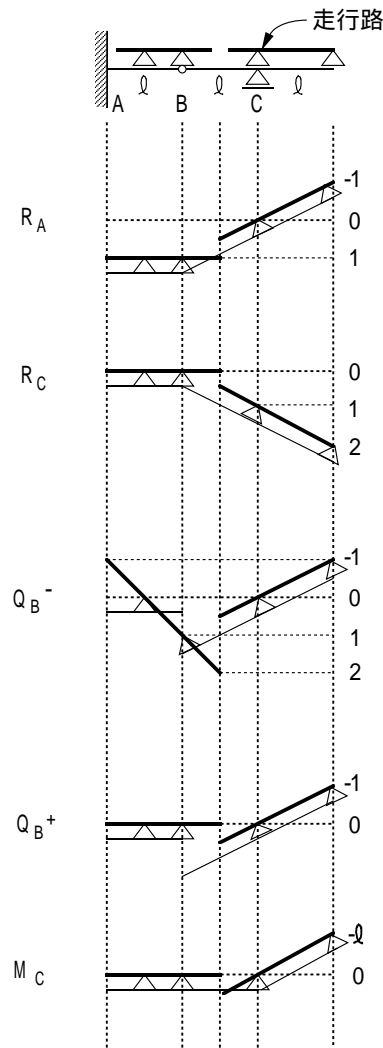


## 間接荷重を受ける時の影響線

間接荷重を受ける時の影響線は梁が走行路の場合の影響線に実際の走行路をのせたものになる。

例題

次のはり構造物の指定された場所の影響線を求めよ。



細線：上の問題ではりが走行路の時の影響線の形状

太線：問題の解

## 2.9 変位法によるはりの解法

### 2.9.1 はりの変位法の特徴

はりの応力法では、S.A. な系から出発して、適合条件により解を求める。その際、S.A. な  $(M, Q)$  は、与えられた分布荷重  $p$  に対して

$$Q' = -p$$

$$M' = Q$$

を満たすものであって、微分方程式の解であるから、一つの区間当たり 2 個の積分定数の自由度を有する。即ち、S.A. な系は本質的に有限次元である。

一方、はりの変位法では、K.A. な系から出発して、つりあい式により解を求める。その際、 $(\theta, \phi)$  は、(必要であれば) 境界条件を満たすように与えた関数  $y$  に対して

$$\begin{aligned}\theta &= y'' \\ \phi &= -\theta' = -y'''\end{aligned}$$

と「定義」される量であり、その結果、K.A. な系は微分方程式の解としてではなく、任意関数を適当に微分したものとして与えられる。即ち、はりの変位法は、未知定数を決定する問題ではなく、未知「関数」を決定する問題に帰着される。変位法では解を探す空間、即ち K.A. な系は無窮自由度を有し、厳密解を求めようとすると変分法の問題が得られる。この問題を解けば、単にたわみに関する既知の微分方程式が得られるだけである。従って、はりの変位法による解法を厳密に追求しても、特に新しい結果は得られない。変位法は、以下に見るように、むしろ近似解法として非常に有用なものである。

## 2.9.2 変位法を用いた単一のはり区間における近似解の構成

以下、若干厳密さを犠牲にして、変位法を用いたはりの近似解の構成法の概略を述べる。

今、図に示すはりの単一区間を考える。ここで、たわみ  $y$  は下向きを正、たわみ角  $\theta$  は時計

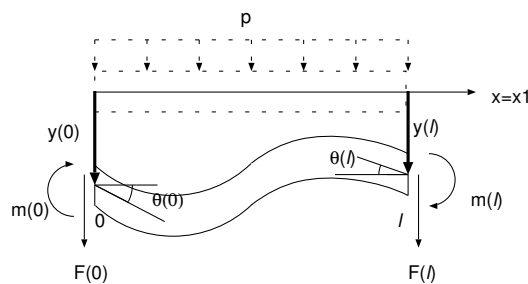


Fig 2.32 はり

回りを正とする。

### 近似適合系の構成

今、区間  $(0, l)$  におけるはりの適合系として任意関数を考えるのではなく、近似的に 3 次多項式に限定してみる。更に、はりの両端でたわみとたわみ角をパラメータとして、区間  $(0, l)$  でのたわみを表現する事を考える。

そのため、3次多項式で表される形状関数  $N_1$ 、 $N_2$ 、 $N_3$ 、 $N_4$  を以下のように導入する。まず、 $N_1$  は、

$$N_1(0) = 1, \frac{dN_1(0)}{dx} = 0$$

$$N_1(l) = 0, \frac{dN_1(l)}{dx} = 0$$

をみたすものとする、次のように求められる。

$$N_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3$$

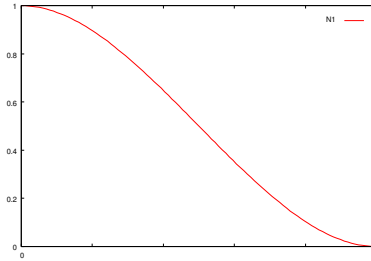


Fig 2.33  $N_1$

同様に、 $N_2$  は、

$$N_2(0) = 0, \frac{dN_2(0)}{dx} = 0$$

$$N_2(l) = 1, \frac{dN_2(l)}{dx} = 0$$

をみたすものとする、次のように求められる。

$$N_2(x) = 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3$$

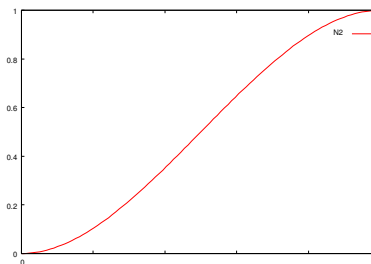


Fig 2.34  $N_2$

$M_1$  は、

$$M_1(0) = 0, \frac{dM_1(0)}{dx} = 1$$

$$M_1(l) = 0, \frac{dM_1(l)}{dx} = 0$$



をみだすものとする、次のように求められる。

$$M_1 = l\left[\left(\frac{x}{l}\right) - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$$

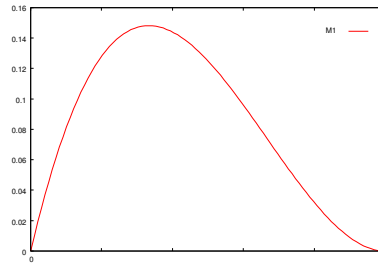


Fig 2.35  $M_1$

$M_2$  は、

$$M_2(0) = 0, \frac{dM_2(0)}{dx} = 0$$

$$M_2(l) = 0, \frac{dM_2(l)}{dx} = 1$$

をみだすものとする、次のように求められる。

$$M_2 = l\left[-\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$$

が得られる。

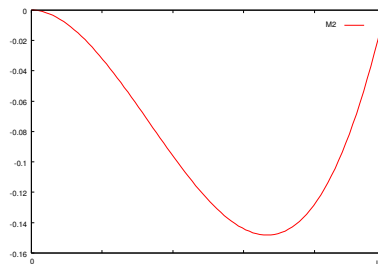


Fig 2.36  $M_2$

これらの形状関数を用いて、適合系のたわみを次のように表現する。

$$y \approx y(0)N_1(x) + y(l)N_2(x) + \theta(0)M_1(x) + \theta(l)M_2(x) \quad (2.30)$$

たわみ角や曲率は、これを微分して求める。なお、 $N_1$ 、 $N_2$ 、 $M_1$ 、 $M_2$  用いた補間を3次のスプライン補間と呼ぶ。

## 要素剛性の決定

今、考える区間におけるはりのたわみが (2.30) で近似的に与えられるものとする。この時、(2.30) に構成関係を用いて求めた  $M$  が釣合系をなすためには、任意の適合系と仮想仕事の原理を満たさなければならない。近似解を構成するためには、任意の適合系に対して仮想仕事を満足させる代わりに、(2.30) の形の適合系に対してのみ仮想仕事を要求する。

以上を具体的に実行してみる。まず、仮想仕事の原理 (\*は適合系、\*なしは釣合系)

$$\int_0^l M\phi^* dx = \sum_{\text{両端}} Fy^* + \sum_{\text{両端}} m\theta^* + \int_0^l py^* dx$$

において、 $M$  は変位仮定の式 (2.30) から得られる適合系に構成関係 (簡単のため、線形弾性を仮定) を用いて求めたモーメント

$$M = -EI(y(0)N_1'' + y(l)N_2'' + \theta(0)M_1'' + \theta(l)M_2'')$$

とし、仮想適合系として  $y^* = N_1$ 、即ち、

$$\begin{aligned}\theta^* &= N_1' \\ \phi^* &= -N_1''\end{aligned}$$

と仮定すると

$$\int_0^l EI(y(0)N_1'' + y(l)N_2'' + \theta(0)M_1'' + \theta(l)M_2'')N_1'' dx = F(0) + \int pN_1 dx$$

が得られる。以下同様に、 $y^* = M_1$  のときは、

$$\int_0^l EI(y(0)N_1'' + y(l)N_2'' + \theta(0)M_1'' + \theta(l)M_2'')M_1'' dx = m(0) + \int pM_1 dx$$

$y^* = N_2$  のときは、

$$\int_0^l EI(y(0)N_1'' + y(l)N_2'' + \theta(0)M_1'' + \theta(l)M_2'')N_2'' dx = F(l) + \int pN_2 dx$$

$y^* = M_2$  のときは、

$$\int_0^l EI(y(0)N_1'' + y(l)N_2'' + \theta(0)M_1'' + \theta(l)M_2'')M_2'' dx = m(l) + \int pM_2 dx$$

となる。以上より、

$$\mathbf{K}_e = \begin{pmatrix} \int EIN_1''N_1'' dx & \int EIN_1''M_1'' dx & \int EIN_1''N_2'' dx & \int EIN_1''M_2'' dx \\ \int EIM_1''N_1'' dx & \int EIM_1''M_1'' dx & \int EIM_1''N_2'' dx & \int EIM_1''M_2'' dx \\ \int EIN_2''N_1'' dx & \int EIN_2''M_1'' dx & \int EIN_2''N_2'' dx & \int EIN_2''M_2'' dx \\ \int EIM_2''N_1'' dx & \int EIM_2''M_1'' dx & \int EIM_2''N_2'' dx & \int EIM_2''M_2'' dx \end{pmatrix}$$

として、

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ m(0) \\ F(l) \\ m(l) \end{pmatrix} = \mathbf{K}_e \begin{pmatrix} y(0) \\ \theta(0) \\ y(l) \\ \theta(l) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \int pN_1 dx \\ \int pM_1 dx \\ \int pN_2 dx \\ \int pM_2 dx \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

が成り立つ。ここに、 $\mathbf{K}_e$  は要素剛性行列と呼ばれる。

### 2.9.3 はり構造の有限要素法

次に、大きなはり構造物を考える (図 2.37 参照)。この構造を解析するために、はり全体をいくつかの小部分に分割し、各小部分を (有限) 要素と呼ぶ。要素分割は、各要素内でたわみを 3 次関数で良好に近似できる程度に細かくとる。図 2.37 では  $e$  で囲んだ文字が要素番号を表している。同図では  $i$  番目の要素の両端の点を節点  $i$ 、節点  $i+1$  と名付けている。そうすると、 $i$  番目の要素の両端のたわみ  $(y_i, y_{i+1})$ 、たわみ角  $(\theta_i, \theta_{i+1})$  と、 $i$  番目の要素の両端に作用する材端力  $(F_i^i, F_{i+1}^i)$ 、材端モーメント  $(m_i^i, m_{i+1}^i)$  の関係は、近似的に前節で求めた (2.31) となる。

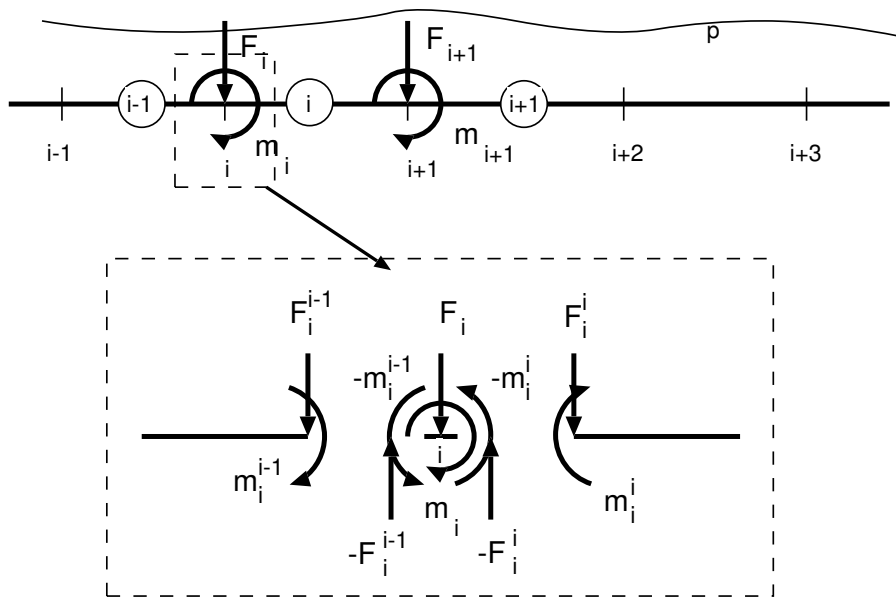


Fig 2.37 はりの有限要素法

次に、節点  $i$  における釣合式を考える。節点  $i$  に作用する節点力、及び節点モーメントは、要素  $i-1$  と  $i$  の材端力、モーメントと釣り合うので、

$$\begin{aligned} F_i &= F_i^{i-1} + F_i^i \\ m_i &= m_i^{i-1} + m_i^i \end{aligned}$$

を得る。従って、構造全体では図 2.38 のような行列が得られる。図 2.38 中の行列を全体剛性行列という。全体剛性行列中の  $K_e^{i-1}$  と  $K_e^i$  の重なった部分では要素  $i-1$  の要素剛性  $K_e^{i-1}$  と要素  $i$  の要素剛性  $K_e^i$  とが重ね合わされている (加算されている) 事に注意されたい。一般に、各節点では  $(F_i, y_i)$ 、 $(m_i, \theta_i)$  の組の中のいずれかが与えられているので、既知のものを  $b$  に、未知のものを  $x$  にまとめると、線形方程式

$$Ax = b$$

が得られる。これを未知数  $x$  について解けば、与えられた問題の近似解が得られる。以上が、はり構造物の有限要素法の概略である。

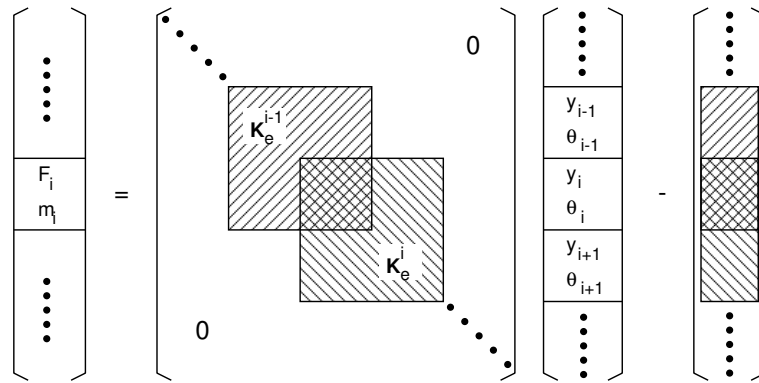


Fig 2.38 全体剛性行列の構成

なお、ここでは限られた講義時間に納めるために要素剛性という考え方をういたが、本来、有限要素法の理論において、要素剛性という概念は本質的でなく、単に積分を計算するための便法に過ぎない事に注意する。

### 2.9.4 より一般的な平面はり構造の有限要素法のために

ラーメン構造などのより一般的な平面はり構造に対する有限要素法を展開する時、部材軸方向の伸びが0という仮定はかえって問題を複雑にするおそれがある。そこで、最後に、中心軸の伸びを許した場合の仮想仕事の原理を導いておく。

まず、釣合系 (\* で表示) の定義に軸方向の力の釣合を考慮する事を考える。はりの軸方向の力のつりあいは、図を参照して以下になる。

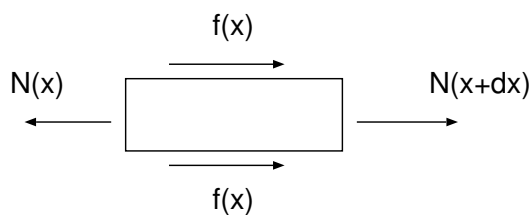


Fig 2.39 軸力のつりあい

$$N^*(x + dx) + f^*(x)dx - N^*(x) = 0$$

即ち、

$$\frac{dN^*}{dx} = -f^*(x)$$

ここに  $N^*$  は軸力、 $f^*$  は軸方向の外力である。これ以外はこれまでのはり理論の釣合系と同じである。

次に、適合系の拡張として、はりの軸方向の変形を導入する。まず、軸方向の変位  $u_1$  を次のように仮定する。

$$u_1(x_1, x_2) = a(x_1)x_2 + U_1(x_1)$$

ここに、 $U_1(x)$  は中心軸の軸方向変位である。すると、中心軸上の軸方向の直ひずみ  $\varepsilon_{11}$  は

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \frac{dU_1}{dx}$$

と書ける。

仮想仕事の原理における軸方向ひずみと軸力の寄与は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \int N^* \varepsilon_{11} dx &= \int_0^l N^* \frac{dU_1}{dx} dx \\ &= [N^* U_1]_0^l - \int_0^l \frac{dN^*}{dx} U_1 dx \\ &= N^*(l)U_1(l) - N^*(0)U_1(0) + \int_0^l f^* U_1 dx \\ &= F_1^*(l)U_1(l) + F_1^*(0)U_1(0) + \int_0^l f^* U_1 dx \end{aligned}$$

ここに  $F_1$  は材端力の軸方向成分である。従って、軸力、軸ひずみの効果を含まない仮想仕事の原理

$$\int M^* \phi dx = \sum F_2^* y + \sum m^* \theta + \int p^* y dx$$

に

$$\int N^* \varepsilon_{11} dx = \sum F_1^* u_1 + \int f^* u_1 dx$$

を加える事によって、軸方向の変形を考慮した仮想仕事の原理

$$\int M^* \phi dx + \int N^* \varepsilon_{11} dx = \sum \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{u} + \sum m^* \theta + \int \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{u} dx$$

を得る。ここに、

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^* &= (f^*, p^*) \\ \mathbf{u} &= (U_1, y) \end{aligned}$$

である。軸方向の変位を、例えば材端の変位を線形補間したもので近似し、たわみについては上に述べたようにスプライン補間すれば、上記の仮想仕事の原理から、ラーメン構造などを含む、より一般的な平面はり構造の有限要素法が得られる。

なお、より一般的な立体骨組み構造の有限要素法を展開するためには、更に面外方向のたわみと、ねじりの効果を考慮する必要がある。

# 第3章 不静定はり構造の手計算による解法

ここでは、以下の方法について述べる。

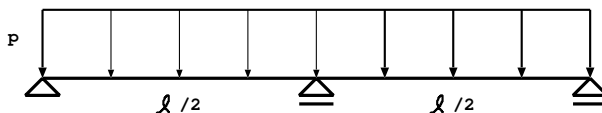
- 弾性方程式
- 三連モーメント式による方法  
以上、応力法、適合条件を用いて不静定構造を解く。
- たわみ角法 → 変形法

## 3.1 弾性方程式

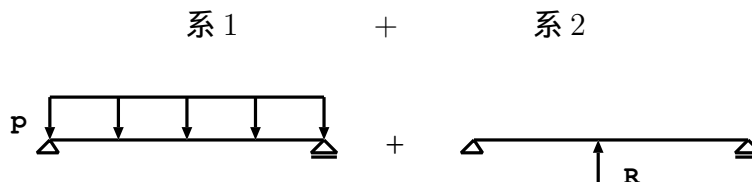
不静定構造の支点をいくつか取り去って静定構造を作る。もとの不静定構造を支点位置に荷重を受ける静定構造として考え支点における変形条件から不静定力を決定する。次に例題を示す。

例題

次の梁の中間点での支点反力を求める。



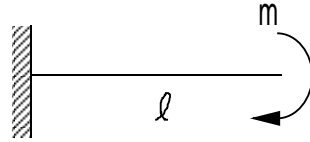
上の梁は次の様に分解できる。



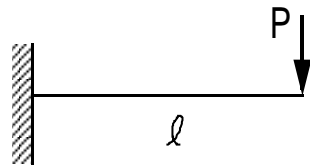
下向を正にすると系1と系2での中間点でのたわみはそれぞれ、 $\frac{5pl^4}{384EI}$ 、 $-\frac{Rl^3}{48EI}$  であるので次の式が成り立つ。

$$\frac{5pl^4}{384EI} - \frac{Rl^3}{48EI} = 0 \Rightarrow R = \frac{5pl}{8}$$

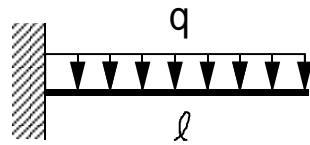
次にいくつかの静定構造の解を列挙する．これらを使って不静定構造を解くと便利な場合もあるので，覚えることが出来れば楽である．



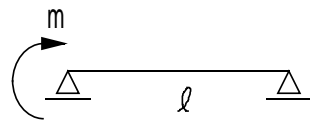
右端のたわみ  $\frac{m\ell^2}{2EI}$  , 右端のたわみ角 (絶対値)  $\frac{m\ell}{EI}$



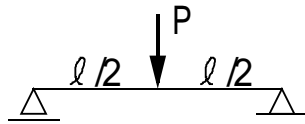
右端のたわみ  $\frac{P\ell^3}{3EI}$  , 右端のたわみ角 (絶対値)  $\frac{P\ell^2}{2EI}$



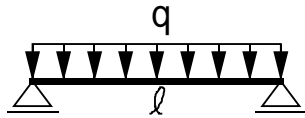
右端のたわみ  $\frac{q\ell^4}{8EI}$  , 右端のたわみ角 (絶対値)  $\frac{q\ell^3}{6EI}$



左端のたわみ角 (絶対値)  $\frac{m\ell}{3EI}$  , 右端のたわみ角 (絶対値)  $\frac{m\ell}{6EI}$



中央のたわみ  $\frac{P\ell^3}{48EI}$ , 両端のたわみ角 (絶対値)  $\frac{P\ell^2}{16EI}$

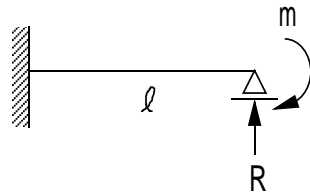


中央のたわみ  $\frac{5q\ell^4}{384EI}$ , 両端のたわみ角 (絶対値)  $\frac{q\ell^3}{24EI}$

上のパターンにあてはまらないものは例えば, 単位荷重法で求めれば良い.

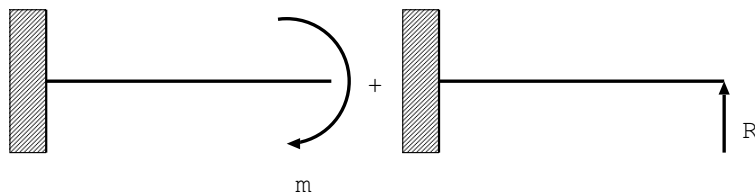
### 例題

次の梁の右端での支点反力を求める.



上の梁は次のように分解される.

系 1                    +                    系 2

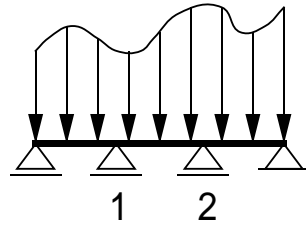


下向を正にすると系 1, 系 2 での右端でのたわみはそれぞれ,  $\frac{m\ell^2}{2EI}$ ,  $-\frac{R\ell^3}{3EI}$  であるので次の式が成り立つ.

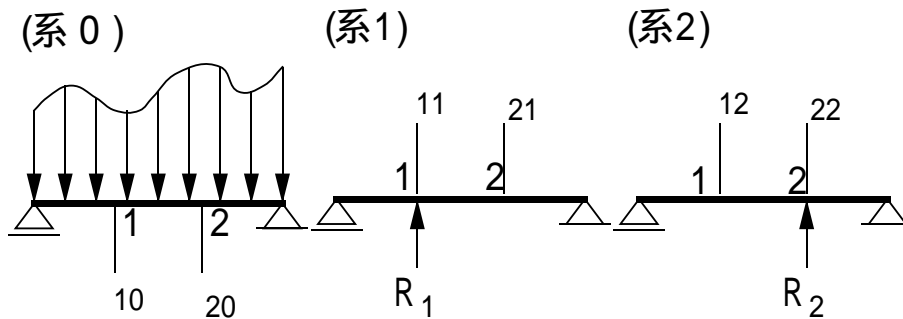
$$\frac{m\ell^2}{2EI} - \frac{R\ell^3}{3EI} = 0 \Rightarrow R = \frac{3m}{2\ell}$$



これまででは、1次不静定構造について書いてきたが、高次不静定についても同様に次のように解くことができる。



上の梁は次の様に分解される。



$\delta_{i0}$  : 系0で支点  $i$  におけるたわみ (下向き正)

$\delta_{i1}$  : 支点1の位置に大きさ1の荷重が作用した時の系1の点  $i$  のたわみ (上向き正)

$\delta_{i2}$  : 支点2の位置に大きさ1の荷重が作用した時の系2の点  $i$  のたわみ (上向き正)

$$\text{支点1でのたわみ } 0 = \delta_{10} - \delta_{11}R_1 - \delta_{12}R_2$$

$$\text{支点2でのたわみ } 0 = \delta_{20} - \delta_{21}R_1 - \delta_{22}R_2$$

結局、次の代数方程式を解くことになる。

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{pmatrix}$$

一般的には次のような代数方程式を解く。

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \vdots \\ \delta_{n0} \end{pmatrix}$$

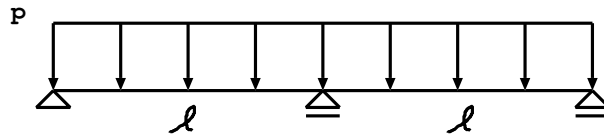
弾性方程式の係数行列は対称行列  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$  となる。(∵相反定理)

### 3.2 三連モーメント式による解法

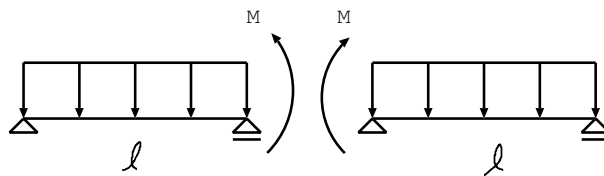
三連モーメント法はモーメントを未知数にとった不静定はり構造の解法である．応力法の一つである．

例題

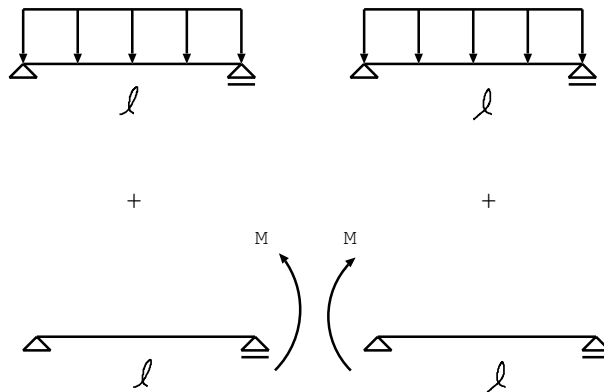
次の梁の中間支点でのモーメントを計算せよ．( $EI$ ：一定)



上の梁は次のように分解できる．



さらに次のように分解できる．



$$\text{中間支点の左側のたわみ角は } -\frac{p\ell^3}{24EI} - \frac{M\ell}{3EI}$$

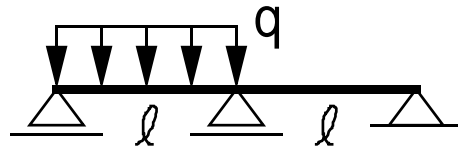
$$\text{中間支点の右側のたわみ角は } \frac{p\ell^3}{24EI} + \frac{M\ell}{3EI}$$

中間支点の左側のたわみ角は右側のたわみ角と等しいので

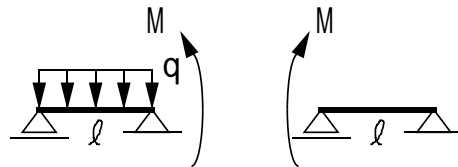
$$-\frac{p\ell^3}{24EI} - \frac{M\ell}{3EI} = \frac{p\ell^3}{24EI} + \frac{M\ell}{3EI} \Rightarrow M = -\frac{p\ell^2}{8}$$

例題

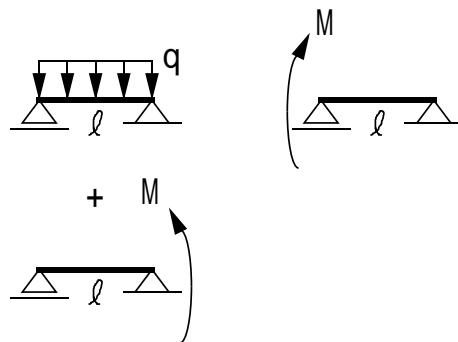
次の梁の中間支点での曲げモーメントを求めよ。(EI: 一定)



上の梁は次の様に分解できる。



上の梁はさらに次の様に分解できる。



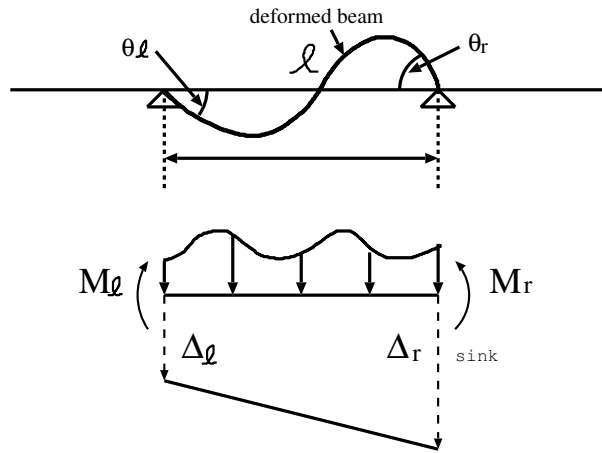
中間支点の左側のたわみ角は  $-\frac{q\ell^3}{24EI} - \frac{M\ell}{3EI}$

中間支点の右側のたわみ角は  $\frac{M\ell}{3EI}$

中間支点の左側のたわみ角は右側のたわみ角と等しいので

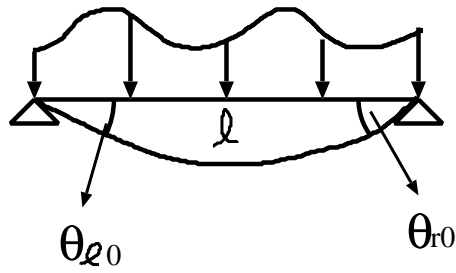
$$-\frac{q\ell^3}{24EI} - \frac{M\ell}{3EI} = \frac{M\ell}{3EI} \Rightarrow M = -\frac{q\ell^2}{16}$$

もう少し一般的な場合について述べる．次のように連続梁の一区間を取り出して考える．



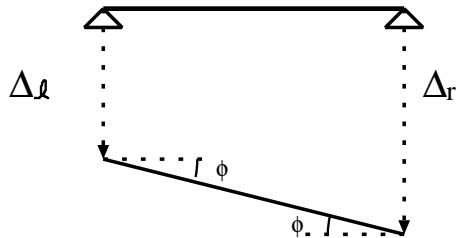
上の一区間は次のように分解される．

- 分布荷重のみ作用する単純梁



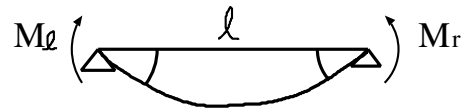
分布荷重による左右のたわみ角はそれぞれ  $\theta_{l0}, \theta_{r0}$

- 沈下する単純梁



$$\text{沈下による左右のたわみ角は } \phi = \frac{\Delta_r - \Delta_l}{l}$$

- 曲げモーメントが作用する単純梁

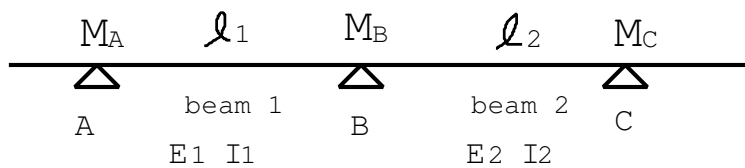


曲げモーメントによる左右のたわみ角はそれぞれ  $\frac{M_l \ell}{3EI} + \frac{M_r \ell}{6EI}$ ,  $-\frac{M_l \ell}{6EI} - \frac{M_r \ell}{3EI}$

結局トータルのたわみ角  $\theta_l, \theta_r$  は

$$\begin{aligned}\theta_l &= \theta_{l0} + \phi + \frac{M_l \ell}{3EI} + \frac{M_r \ell}{6EI} \\ \theta_r &= \theta_{r0} + \phi - \frac{M_l \ell}{6EI} - \frac{M_r \ell}{3EI}\end{aligned}\tag{3.1}$$

次は連続梁の二区間について考える．



$$\text{節点 } B \text{ の左側のたわみ角} = \theta_{r0}^1 + \phi_1 - \frac{M_A \ell_1}{6E_1 I_1} - \frac{M_B \ell_1}{3E_1 I_1}$$

$$\text{節点 } B \text{ の右側のたわみ角} = \theta_{l0}^2 + \phi_2 + \frac{M_B \ell_2}{3E_2 I_2} + \frac{M_C \ell_2}{6E_2 I_2}$$

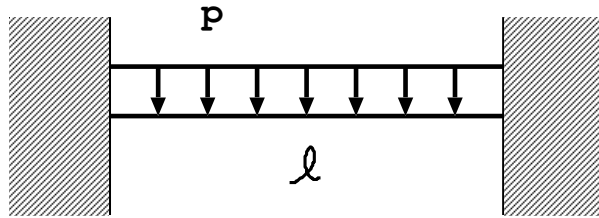
節点 B の左側のたわみ角と右側のたわみ角が等しいので次の式が導かれる．

$$\frac{\ell_1}{6E_1 I_1} M_A + \left( \frac{\ell_1}{3E_1 I_1} + \frac{\ell_2}{3E_2 I_2} \right) M_B + \frac{\ell_2}{6E_2 I_2} M_C = \theta_{r0}^1 + \phi_1 - \theta_{l0}^2 - \phi_2$$

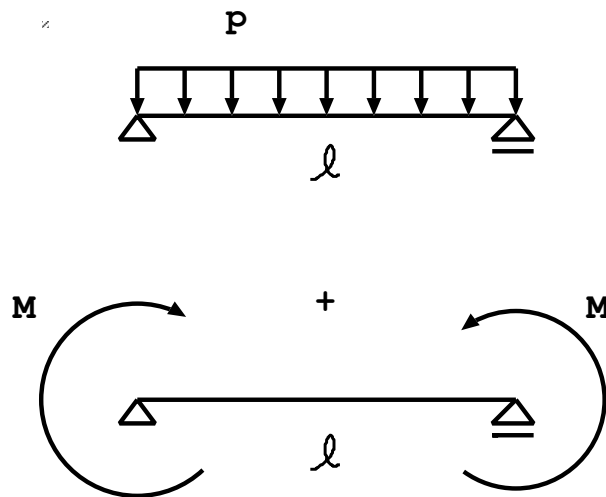
これを三連モーメント公式と言う．

例題

次の梁の左端の曲げモーメントを求めよ。(EI : 一定)



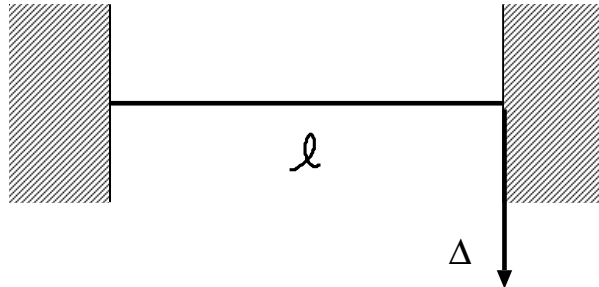
この梁は形状，荷重の対称性より，次のように分解される．



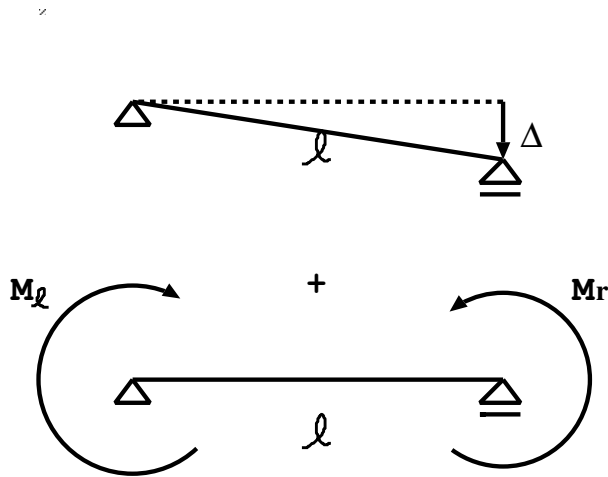
$$\text{梁左端の右側のたわみ角} \theta = 0 = \frac{p\ell^3}{24EI} + \frac{M\ell}{3EI} + \frac{M\ell}{6EI} \Rightarrow M = -\frac{p\ell^2}{12}$$

例題

次の梁の右端が  $\Delta$  沈下した時の両端の曲げモーメントを求めよ。(EI : 一定)



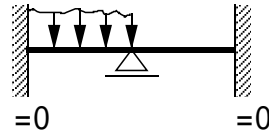
この梁は次のように分解される。



$$\begin{aligned} \text{梁左端の右側のたわみ角} \theta = 0 &= \frac{\Delta}{l} + \frac{M_l l}{3EI} + \frac{M_r l}{6EI} \\ \text{梁右端の左側のたわみ角} \theta = 0 &= \frac{\Delta}{l} - \frac{M_l l}{6EI} - \frac{M_r l}{3EI} \\ \Rightarrow M_l &= -\frac{6\Delta EI}{l^2}, \quad M_r = \frac{6\Delta EI}{l^2} \end{aligned}$$

### 3.3 たわみ角法

三連モーメント法ではモーメントを未知数にし、たわみ角の連続条件から解を求めたのに対し、たわみ角法では、たわみを未知数にとり、モーメントの連続条件から解を求める。次の問題を考えてみる。

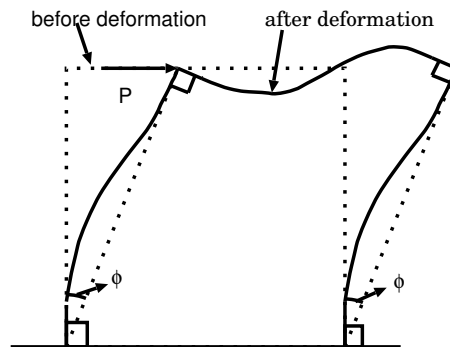


応力法で解くと未知数は3つ(例：両端のモーメント，中央支点の反力)である。ところが，同じ問題でたわみ角を未知数にすると，未知数は中央の支点のたわみ角1つであり楽に解ける。

(3.1) を行列を使うと次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} \theta_\ell \\ \theta_r \end{pmatrix} = \frac{\ell}{6EI} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_\ell \\ M_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_{\ell 0} + \phi \\ \theta_{r 0} + \phi \end{pmatrix}$$

ここで， $\theta_{\ell 0}, \theta_{r 0}$  は既知であるが， $\phi$  は下図からわかるように一般には未知である。しかし，ここでは，簡単のために $\phi$ (変形後の部材両端を直線で結んだ時のたわみ角)が既知の問題のみを扱う。従って，右辺第二項は既知である。



これをモーメントについて解くと，

$$\begin{pmatrix} M_\ell \\ M_r \end{pmatrix} = \frac{2EI}{\ell} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_\ell - \theta_{\ell 0} - \phi \\ \theta_r - \theta_{r 0} - \phi \end{pmatrix}$$

がえられ，これを書き下すと，

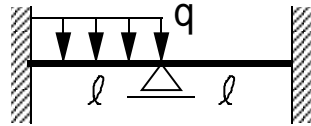
$$\begin{aligned} M_\ell &= \frac{2EI}{\ell} (2\theta_\ell + \theta_r - 2\theta_{\ell 0} - \theta_{r 0} - 3\phi) \\ M_r &= \frac{2EI}{\ell} (-\theta_\ell - 2\theta_r + \theta_{\ell 0} + 2\theta_{r 0} + 3\phi) \end{aligned}$$

となり，これをたわみ角公式と呼ぶ。



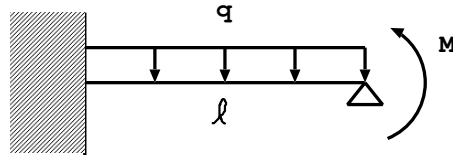
例題

次の梁の中央でのたわみ角を求めよ。(両端のたわみ角は0,  $EI$ :一定)



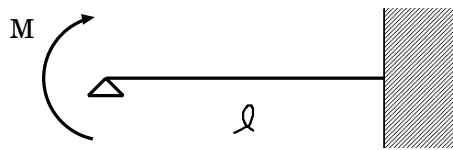
この問題をたわみ角法で解く場合, つりあい式1つで中央の支点の $\theta$ が求まる. 左半分, 右半分の梁に別けてそれぞれでたわみ角の公式を使う.

まず, 左半分の梁について考える.



$$\begin{aligned}
 M &= \frac{2EI}{l} \left( -0 - \theta + \frac{ql^3}{24EI} - \frac{2ql^3}{24EI} + 0 \right) \\
 &= -\frac{4EI\theta}{l} - \frac{ql^2}{12}
 \end{aligned}$$

次に右半分について考える.



$$\begin{aligned}
 M &= \frac{2EI}{l} (2\theta + 0 - 0 - 0 - 0) \\
 &= \frac{4EI\theta}{l}
 \end{aligned}$$

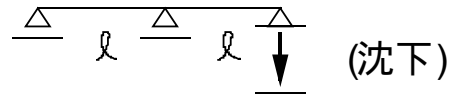
よって,

$$-\frac{4EI\theta}{l} - \frac{ql^2}{12} = \frac{4EI\theta}{l} \Rightarrow \theta = -\frac{ql^3}{96EI}$$

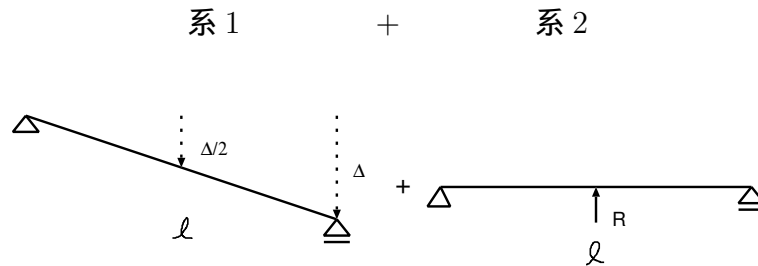
最後に次の問題を弾性方程式，三連モーメント法，たわみ角法を用いて次の例題を解いてみよう．

例題

次の梁 M 図を書け． ( $EI$  : 一定)

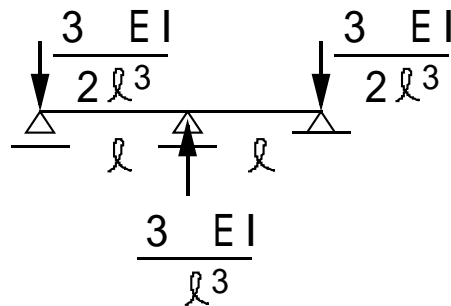


- 弾性方程式による解法．  
上の梁を次のように分解する．

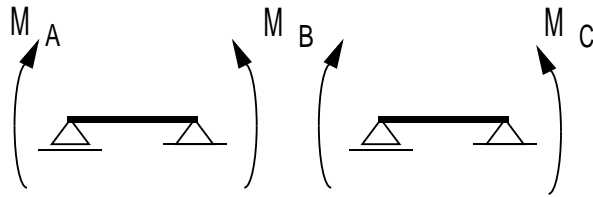


$$\begin{aligned} \text{系1の midpoint でのたわみは} & \frac{\Delta}{2} \\ \text{系2の midpoint でのたわみは} & \frac{R\ell^3}{6EI} \\ \frac{\Delta}{2} - \frac{R\ell^3}{6EI} = 0 & \Rightarrow R = \frac{3\Delta EI}{\ell^3} \end{aligned}$$

また，両端の支点反力は以下ようになる．



- 三連モーメント法による解法 .

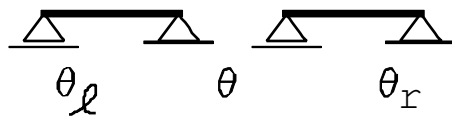


$$\text{左のはりの右端のたわみ角}\theta_r = 0 + 0 + \frac{\ell}{6EI}(-2M_B)$$

$$\text{右のはりの左端のたわみ角}\theta_\ell = \frac{\Delta}{\ell} + 0 + \frac{M_B\ell}{3EI}$$

$$\text{たわみ角の連続性から } -\frac{M\ell}{3EI} = \frac{M\ell}{3EI} + \frac{\delta}{\ell} \Rightarrow M_B = -\frac{3\Delta EI}{2\ell^2}$$

- たわみ角法による解法 .



左側のはりについて

$$0 = M_A = \frac{2EI}{\ell}(2\theta_\ell + \theta)$$

$$M_B = \frac{2EI}{\ell}(-\theta_\ell - 2\theta)$$

右側のはりについて

$$M_B = \frac{2EI}{\ell}(2\theta + \theta_r - 3\frac{\Delta}{\ell})$$

$$0 = M_C = \frac{2EI}{\ell}(-\theta - 2\theta_r + 3\frac{\Delta}{\ell})$$

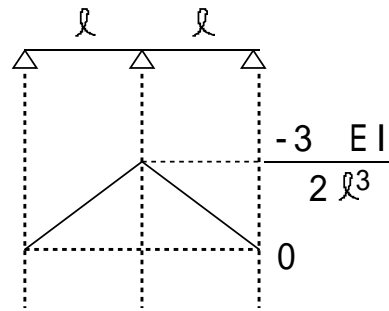
以上から

$$\theta = \frac{\Delta}{2\ell}, \theta_\ell = -\frac{\Delta}{4\ell}, \theta_r = \frac{5\Delta}{4\ell}$$

これを用いて

$$M_B = -\frac{3\Delta EI}{2\ell^2}$$

M 図は以下の通りである .



この問題では , 三連モーメントで解くのが一番楽である . このように , 問題に応じて簡易に解ける方法を考えることが実は重要なことである .

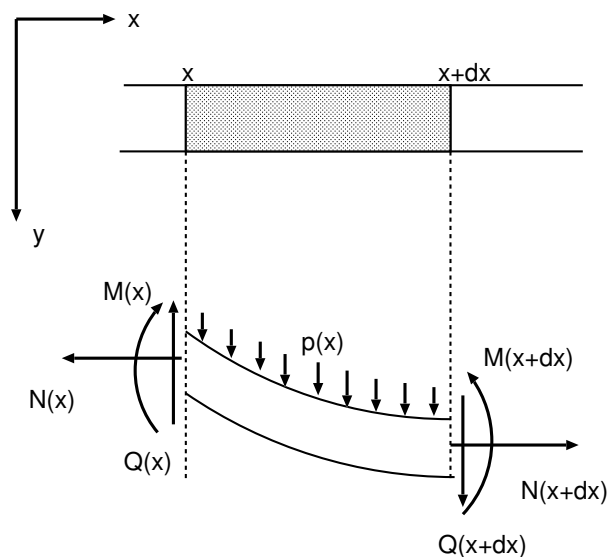
# 第4章 座屈

## 4.1 Eulerの座屈理論

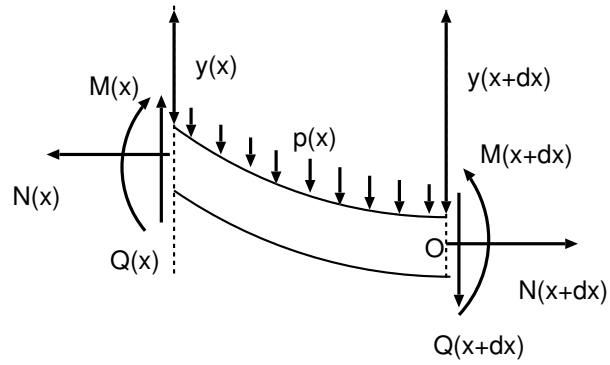
### 4.1.1 定式化

これまでは、梁のつりあい式を変形前の状態で考えていたが、実際は変形後の状態でつりあいを考えるべきであり、座屈理論では変形後の状態でのつりあい式を考えて定式化を行っていく。

- つりあい式



- $x$  方向のつりあい  
 $N(x + dx) - N(x) = 0$  より  $N(x)$  は一定で、 $N = -P$  ( $P$  は圧縮力) .
- $y$  方向の力のつりあい  
 $p(x)dx + Q(x + dx) - Q(x) = 0$  より  $Q'(x) = -p(x)$
- 点  $O$  回りのモーメントのつりあい



$$0 = M(x + dx) + p(x)dx \frac{dx}{2} - M(x) - Q(x)dx - P(y(x + dx) - y(x))$$

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{M(x + dx) - M(x)}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \left( Q(x) + P \frac{y(x + dx) - y(x)}{dx} - \frac{p}{2} dx \right)$$

$$M'(x) = Q(x) + Py'$$

以上をまとめて

$$Q = M' - Py'$$

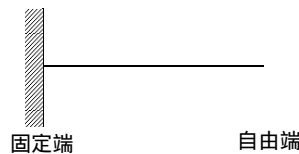
$$-p = Q' = M'' - Py''$$

$$p = (EIy''')' + Py'' (\because \text{構成関係})$$

これが座屈理論での支配方程式になる。

#### 4.1.2 境界条件

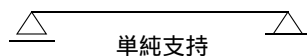
ここでは、固定端、自由端および単純支持での境界条件について述べる。



(固定端)  $y = 0, \quad y' = 0$

(自由端)  $M = 0 \rightarrow y'' = 0,$

$Q = 0 \rightarrow -EIy''' - Py' = 0$  (これまでのはり理論の境界条件と異なる)



(両端)  $y = 0, \quad y'' = 0$

### 4.1.3 基礎方程式の一般解

基礎方程式の一般解 = 基礎方程式の特解  $y_0$  + 齊次 (基礎) 方程式の一般解  $\tilde{y}$

$$EI\tilde{y}'''' + P\tilde{y}'' = 0$$

特解  $y_0$  :  $EIy_0'''' + Py_0'' = q$  になるような任意の関数 .  
特に  $q = 0$  なら  $y_0 = 0$  でよい .

$\tilde{y}$  : 4階の微分方程式なので , 一般解は任意定数を4つ含む .

$$\begin{array}{l} EIy'''' + Py'' = q \\ - | \quad EIy_0'''' + Py_0'' = q \\ \hline EI(y - y_0)'''' + P(y - y_0)'' = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow (y - y_0)$  は , 齊次方程式を満たす .

$$\text{従って } y - y_0 = \tilde{y} \Rightarrow y = y_0 + \tilde{y}$$

•  $\tilde{y}$  を求める .

$$\tilde{y}'' = z, \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI}} \text{ とおくと}$$

齊次方程式は

$$EIz'' + Pz = 0 \Rightarrow z'' + k^2z = 0$$

従って  $z = A \cos kx + B \sin kx$  ( $A, B$  は任意定数)

$$\tilde{y}'' = A \cos kx + B \sin kx$$

$$\tilde{y}' = A' \cos kx + B' \sin kx + b$$

$$\tilde{y} = A'' \cos kx + B'' \sin kx + a + bx$$

$A'', B'' \Rightarrow A, B$  で置き直すと

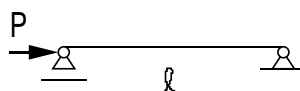
齊次方程式の一般解 :  $\tilde{y} = A \cos kx + B \sin kx + a + bx$  ( $A, B, a, b$  は , 任意定数)

この4つの任意定数は境界条件によって決定される

### 4.1.4 はりの座屈荷重

1 単純ばり

次の梁の座屈荷重  $P_{cr}$  を求めよ . ( $EI$  : 一定)



境界条件 :  $y(0) = y(\ell) = 0, y''(0) = y''(\ell) = 0$

$p = 0$  なので「基礎方程式の一般解」 = 「斉次方程式の一般解」

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = A + a$$

$$y''(0) = 0 \Rightarrow 0 = -k^2 A$$

$$y(\ell) = 0 \Rightarrow 0 = A \cos k\ell + B \sin k\ell + a + b\ell$$

$$y''(\ell) = 0 \Rightarrow 0 = -Ak^2 \cos k\ell - Bk^2 \sin k\ell$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -k^2 & 0 & 0 & 0 \\ \cos k\ell & \sin k\ell & 1 & \ell \\ -k^2 \cos k\ell & -k^2 \sin k\ell & 0 & 0 \end{pmatrix}}_K \begin{pmatrix} A \\ B \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

$|K| \neq 0$  なら  $(A, B, a, b) = (0, 0, 0, 0)$  となり「たわみなし」で興味なし .

$(A, B, a, b) \neq (0, 0, 0, 0)$  の解の存在条件は  $|K| = 0$

$$\begin{aligned} |K| &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -k^2 & 0 & 0 & 0 \\ \cos k\ell & 1 & \sin k\ell & \ell \\ -k^2 \cos k\ell & 0 & -k^2 \sin k\ell & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin k\ell & \ell \\ -k^2 \sin k\ell & 0 \end{vmatrix} \\ &= -k^2 \cdot k^2 \ell \sin k\ell \end{aligned}$$

$$|K| = 0 \Leftrightarrow k = 0, \sin k\ell = 0$$

$k = 0$  は、「 $P = 0$ , たわみなし」で興味なし .

$$\sin k\ell = 0 \Rightarrow k\ell = n\pi \quad (n : \text{整数}) \Rightarrow k\ell = \sqrt{\frac{P}{EI}} \ell = n\pi \Rightarrow P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{\ell^2}$$

従って  $P = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}, \frac{4\pi^2 EI}{\ell^2}, \frac{9\pi^2 EI}{\ell^2}, \dots$  において  $y = 0$  でない解が存在する .

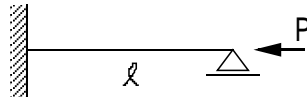
この例題の解は  $y = B \sin kx = B \sin \frac{n\pi x}{\ell}$  であることと合わせて ,

$$\begin{array}{l} n = 1 \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad P = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad : \text{単純ばりの座屈荷重 } P_{cr} \\ \hline n = 2 \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad P = \frac{4\pi^2 EI}{\ell^2} \quad : \text{この荷重に達するまでにはりは座屈する .} \\ \vdots \end{array}$$

## 2 固定 - 単純支持

次の梁の座屈荷重  $P_{cr}$  を求めよ . ( $EI$  : 一定)





境界条件 :  $y(0) = y(l) = 0, y'(0) = 0, y''(l) = 0$

$q = 0$  なので「基礎方程式の一般解」 = 「斉次方程式の一般解」

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = A + a$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow 0 = Bk + b$$

$$y(l) = 0 \Rightarrow 0 = A \cos kl + B \sin kl + a + bl$$

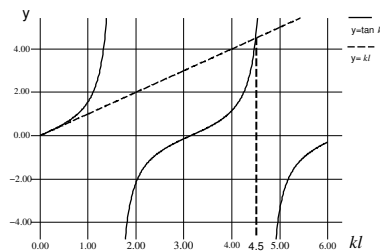
$$y''(l) = 0 \Rightarrow 0 = -Ak^2 \cos kl - Bk^2 \sin kl$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 1 \\ \cos kl & \sin kl & 1 & l \\ -k^2 \cos kl & -k^2 \sin kl & 0 & 0 \end{pmatrix}}_K \begin{pmatrix} A \\ B \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

$(A, B, a, b) \neq (0, 0, 0, 0)$  の解の存在条件は  $|K| = 0$

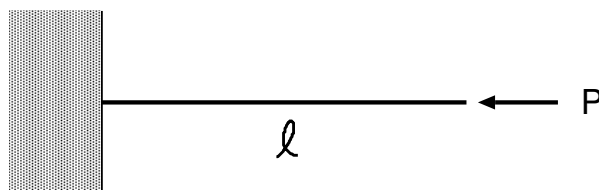
$$\begin{aligned} 0 = |K| &= 1 \cdot \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ \sin kl & 1 & l \\ -k^2 \sin kl & 0 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & k & 1 \\ \cos kl & \sin kl & l \\ -k^2 \cos kl & -k^2 \sin kl & 0 \end{vmatrix} \\ &= k^2 \sin kl + (-k^3 l \cos kl) \rightarrow \tan kl = kl \end{aligned}$$

$\tan kl - kl = 0 \Rightarrow kl = 4.5$  くらい(下図)  $\rightarrow$  単純ばりの場合 ( $kl = \pi$ ) より座屈しにくい.

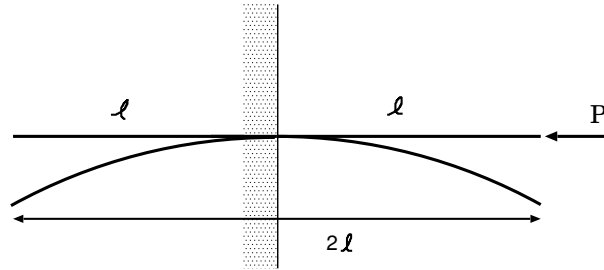


### 3 片持ち梁

次の梁の座屈荷重  $P_{cr}$  を求めよ. ( $EI$  : 一定)



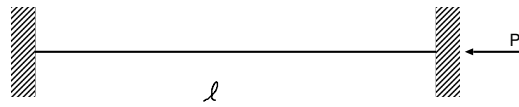
この場合，下図のように固定端の反対側に鏡像のようにたわみ形状を延長させると長さが2倍の単純ばりと同様に扱える．



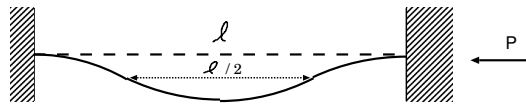
$$\begin{aligned} \text{単純ばりの座屈荷重 } P_{cr} &= \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \text{ から} \\ \ell &\rightarrow 2\ell \text{ として} \\ \text{問題の座屈荷重 } P_{cr} &= \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2} \end{aligned}$$

#### 4 両端固定

次の梁の座屈荷重  $P_{cr}$  を求めよ． ( $EI$  : 一定)

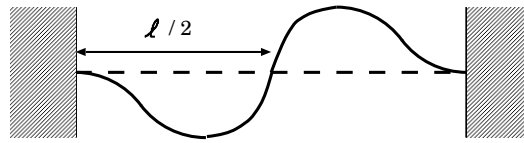


\* 下図のように座屈する時には，長さが  $\frac{\ell}{2}$  の単純ばりと同様に扱える．



$$\text{座屈荷重 } P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{\ell^2}$$

\* 下図のように座屈する時には，長さが  $\frac{\ell}{2}$  で固定-単純支持の場合と同様に扱える．



$$\text{座屈荷重 } P = \frac{(4.5 \text{ くらい})^2 EI}{(\ell/2)^2}$$

以上を合わせるとこの時の座屈荷重  $P_{cr}$  は上の2ケースの小さい方，すなわち  $\frac{4\pi^2 EI}{\ell^2}$  である．

### 5 一般的な状況での梁の座屈荷重

一般に区間  $(-\pi, \pi)$  で定義される関数  $f(x)$  は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

と書ける (Fourier 級数) ．

#### 係数の決定法

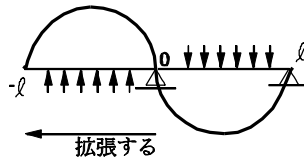
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 2\pi & (n = m = 0) \\ \pi & (n = m \neq 0) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} \pi & (n = m \neq 0) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

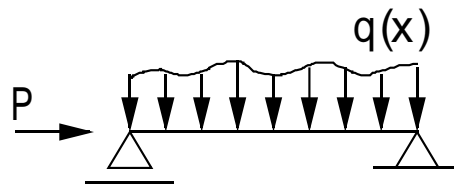
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0 \quad \text{から}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad \text{となる．}$$



$x = 0$  から  $x = \ell$  のたわみ形状を  $x = -\ell$  から  $x = 0$  の部分に図のように拡張すると，たわみ形状は奇関数となる．奇関数では  $a_i = 0$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) である．従って，区間  $0 < x < \ell$  で定義された  $f(x)$  は  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x$  と展開できる．(Fourier 級数の半区間展開)  
これを用いて次の梁 ( $EI$  : 一定) の座屈荷重を計算してみよう．



まず，荷重  $q(x)$ ，たわみ  $y(x)$  を展開する．

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

これらは，境界条件

$$y(0) = 0, \quad y(\ell) = 0$$

$$y''(0) = 0, \quad y''(\ell) = 0$$

を満たしていることに注意する．これらを，微分方程式  $EIy'''' + Py'' = q$  に代入すると，

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \left\{ EI \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 - P \right\} \sin \frac{n\pi x}{\ell} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

上の式を満たすためには 
$$y_n = \frac{q_n}{\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \left\{ EI \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 - P \right\}}$$

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \left\{ EI \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 - P \right\}} \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

すべての  $n$  に対して、 $EI \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \neq P$  ならば係数  $y_n$  が計算でき、解  $y$  を構成することが可能である。ところが、 $P \rightarrow \frac{EI\pi^2}{\ell^2}$  となると  $|y_1| \rightarrow \infty (q_1 \neq 0)$  となり  $|y| \rightarrow \infty$  になる。この時、 $P_{cr} = \frac{EI\pi^2}{\ell^2}$  である。この座屈荷重は分布荷重が存在しない時の座屈荷重と等しく、分布荷重がある場合でも、分布荷重の無いときの座屈荷重が意味のあることを示唆している。

一般に座屈荷重は  $P_{cr} = \frac{\gamma EI}{\ell^2}$  ( $\gamma$ : 定数) と書ける。座屈する部材の応力は  $\sigma = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\gamma E}{\ell^2 A/I}$  である ( $A$ : 部材の断面積)。ここで、回転半径  $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$  を導入すると  $\sigma = \frac{\gamma E}{(\ell/r)^2}$  となる。この  $\frac{\ell}{r}$  を細長比 (slenderness ratio) という。細長比が大きい (ひょろっとしている) ということは  $\sigma$  が小さい、つまり、座屈しやすいということであることがわかる。

## 4.2 座屈理論の応用

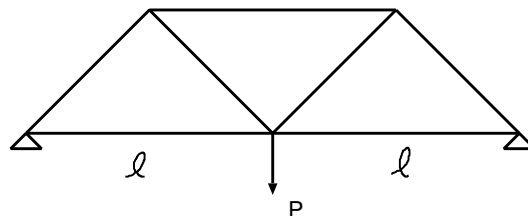
### 4.2.1 トラスの座屈

ここでは、トラスの座屈について述べる。トラスの座屈荷重は次の手順で求める。

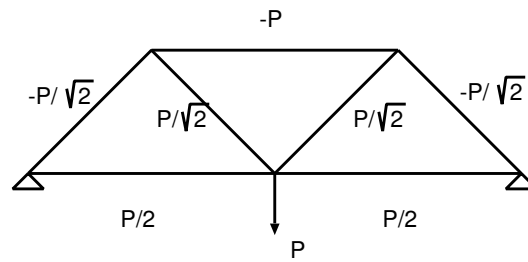
- トラスの部材力を求める。
- 圧縮の部材を見つける。
- 部材力が、部材の  $P_{cr}$  (単純支持の場合) と一致する様な荷重を求める。
- 座屈荷重のうち最小のものがそのトラスの座屈荷重になる。

#### 例題

次のトラスの座屈荷重を求めよ。(EI, A: 一定)



- 部材力を求める  
部材力は次のようになる。



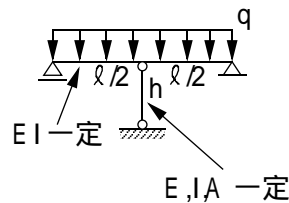
● 座屈荷重を求める

上の図より明らかに最初に部材力が座屈荷重に達するのは部材力  $-P$  の部材である．よって， $P_{cr} = P = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$  となる．

さらに次の例題を考えてみよう．

例題

次の構造物が座屈を起こす分布荷重  $q$  を求めよ．



柱の軸力 (はりの中点にかかる力) を  $R$  とする． $R$  は圧縮を正にとっている．

$$\begin{aligned} \text{中点のたわみ} &= \frac{5q\ell^4}{384EI} - \frac{R\ell^3}{48EI} \\ \text{柱頭の下方変位} &= \frac{Rh}{EA} \end{aligned}$$

従って

$$\frac{Rh}{EA} = \frac{5q\ell^4}{384EI} - \frac{R\ell^3}{48EI} \quad \text{から}$$

$$R = \frac{5q\ell^4}{384EI \left( \frac{\ell^3}{48EI} + \frac{h}{EA} \right)}$$

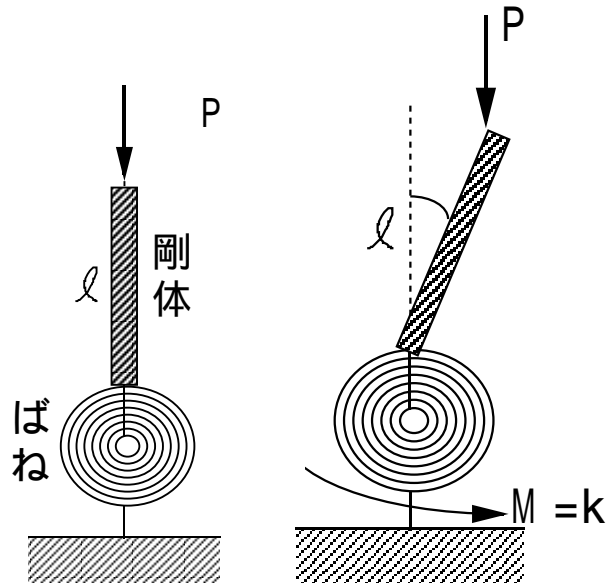
$$R = \frac{\pi^2 EI}{h^2} \quad \text{のとき, 柱は座屈するので}$$

$$\frac{\pi^2 EI}{h^2} = \frac{5q\ell^4}{384EI \left( \frac{\ell^3}{48EI} + \frac{h}{EA} \right)} \quad \text{より}$$

$$\text{座屈荷重} \quad q = \frac{384\pi^2 (EI)^2 \left( \frac{\ell^3}{48EI} + \frac{h}{EA} \right)}{5h^2 \ell^4}$$

### 4.3 座屈後の安定性

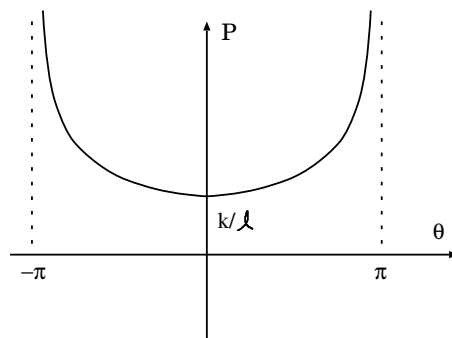
ここでは、座屈が起こった後の構造物の安定性について具体的な例を使って検証してみる。次の構造物の座屈荷重を求めよ。また、座屈がおこったあとどうなるか。



つりあい式は

$$0 = P\ell \sin \theta - k\theta$$

上の方程式の解を考えると、 $\theta = 0$  は明らかに解であり、 $\theta \neq 0$  の時は  $P = \frac{k}{\ell} \frac{\theta}{\sin \theta}$  となる。  
 $P = \frac{k}{\ell} \frac{\theta}{\sin \theta}$  をグラフに描くと次のようになる。

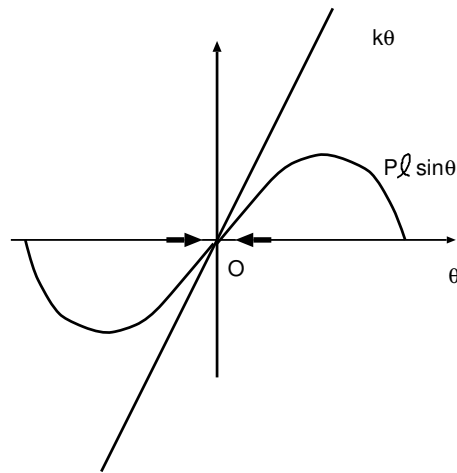


上の図より次のことがわかる。

$P < \frac{k}{\ell}$  のとき方程式の解は  $\theta = 0$  のみ。

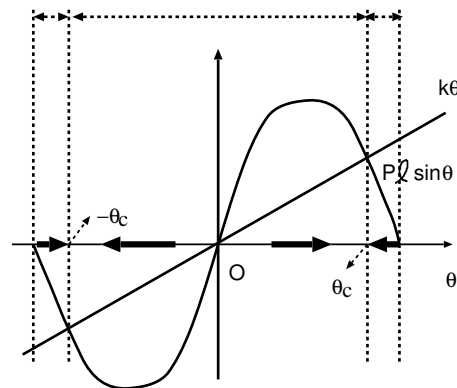
$P > \frac{k}{\ell}$  のとき方程式の解は  $\theta = 0$  以外に 2 つ存在する (合計 3 つ)。

$P < \frac{k}{\ell}$  のときの復元力  $k\theta$  とモーメント  $P\ell \sin\theta$  の関係は下の図のようになる。



この場合， $\theta = 0$  の近傍では，常に復元力が外力によるモーメントを上回り  $\theta = 0$  より右にずれても左にずれても  $\theta = 0$  に戻るので安定していると言える。

$P > \frac{k}{\ell}$  のときの復元力  $k\theta$  と外力によるモーメント  $P\ell \sin\theta$  の関係は下の図のようになる。(解を  $\theta = -\theta_c, 0, \theta_c$  とし，以下で使う  $\varepsilon$  は正の小さい数とする)



- 解  $\theta = -\theta_c$  の安定性

$\theta = -\theta_c - \varepsilon$  の時は復元力が外力によるモーメントより大きいので  $\theta \rightarrow -\theta_c$

$\theta = -\theta_c + \varepsilon$  の時は復元力が外力によるモーメントより小さいので  $\theta \rightarrow -\theta_c$

よって解  $\theta = -\theta_c$  は安定である。

- 解  $\theta = 0$  の安定性

$\theta = -\varepsilon$  の時は復元力が外力によるモーメントより小さいので  $\theta \rightarrow -\theta_c$

$\theta = \varepsilon$  の時は復元力が外力によるモーメントより小さいので  $\theta \rightarrow \theta_c$



よって解  $\theta = 0$  は不安定である .

- 解  $\theta = \theta_c$  の安定性

$\theta = \theta_c - \varepsilon$  の時は復元力が外力によるモーメントより小さいので  $\theta \rightarrow \theta_c$

$\theta = \theta_c + \varepsilon$  の時は復元力が外力によるモーメントより大きいので  $\theta \rightarrow \theta_c$

よって解  $\theta = \theta_c$  は安定である .

以上まとめると ,

$$P_{cr} = \frac{k}{\ell}$$

$P < \frac{k}{\ell}$  の時の解  $\theta = 0$  は安定

$P > \frac{k}{\ell}$  の時の解  $\theta = -\theta_c, \theta_c$  は安定  $\theta = 0$  は不安定

この例が示すように , 構造物の座屈荷重だけでは , 座屈後の構造物の挙動 (どのような壊れ方をするか) を知ることは出来ない . よって , 構造物の設計においてこのように座屈後の挙動について調べることは重要である .