構造力学オンラインテキスト

西村直志@京大学術情報メディアセンター

始めに

このドキュメントは、少し構造力学を知っている人か、古典力学は一通り知っているが、構造力学は知らない人を対象に構造力学の理論の本質を学んでもらうために書かれています。枝葉末節は一切省いてありますが、うそやごまかしは一切無いつもりです。構力の計算は習ったけど、自分はちゃんとわかっていないと感じている諸君（私も学生のときはそうでした）、このドキュメントは皆さんのためにあります。これを読んでもまだわからない人は、もうあきらめてください。バグレポート歓迎。nchml@media.kyoto-u.ac.jp までメールをください。

まだまだ完成までは程遠いのですが、少しづつ書き足して公開する予定です。

履歴

- 1996 年 3 月 21 日。1.2 節まで公開
- 1996 年 4 月 16 日。1.9 節まで公開。これでトラスの非仮想仕事系は完成。www では太字と細字の区別が付きにくいので、矢印によるベクトル記号を採用してみた。
- 1996 年 11 月 9 日。1.10 節を追加。なかなか思うように時間が取れない。その間に、うちの大学では構造力学の授業はどんどん先へ行ってしまうし。トラスを全部書き終えてから公開と思っていたが、仕方がないので、以下小出しにする方針。
- 1997 年 5 月 16 日。1.11 節から 1.15 を追加。多少の bug fix と記号の変更を行なった。後は相反定理と、諸例を書いて、トラス編を終了する予定。
- 1998 年 4 月 14 日。1.16 を追加。今年は構造力学の講義分担が変わり、前期の担当者に私のやり方を説明するため理論を急ごしらえで完成させた。
- 2002 年 12 月 16 日。pdf 版を作成。中身に手は加えていませんが時の流れを考慮して LaTeX2_ε 化しました。

このドキュメントの取扱について

第 1 章　トラスの力学

1.1　トラスとは

トラスとは直線部材を摩擦の無いピンで接合した構造物である。世の中に実在するトラスは多くの場合ピンではなく、ガセットプレートによって部材を接合するが、力学の対象としてのトラスではピン接合の仮定を用いて単純化する。さらに、ピンの空間的な広がりは無視して点であると考え、節点と呼ぶ。

以下で述べるトラスの理論は、さらに次の仮定のもとに組み立てられている。

1. 荷重は節点にのみ作用する。
2. 支持（変位の拘束）は節点に対してのみ行う。
3. 変形は小さく、いわゆる微小変形の仮定が成り立つ。

なお、以下の解説においては、静力学のみを取り上げる。即ち、全ての物理量は時間に依存しないものとする。従って、トラスの「運動」ではなく、「釣合い」を考える。また、現代的な連続体力学の慣例に倣って、構造力学としてはやや変則ではあるが、変形の議論から始めることにする。

1.2　トラスの変形—適合系

トラスの全ての節点に番号を付けて、一般に節点 i 等と呼ぶ。節点番号を表す記号には小文字を用いることにする。節点 i の変形前の位置ベクトルを $\vec{X}_i$ とする。変形後に節点 i の位置ベクトルが $\vec{x}_i$ となったとき、節点 i の変位 $\vec{u}_i$ は

$$\vec{u}_i = \vec{x}_i - \vec{X}_i$$

で定義される。

次に、トラスの全ての部材に番号を付けて、一般に部材 I 等と呼ぶ。部材番号を表す記号には大文字を用いることにする。部材 I の伸び δ_I は

$$\delta_I = l_I - L_I$$

で定義される。ここに、l_I、L_I は、それぞれ変形後の部材 I の長さ、変形前の部材 I の長さである。

δ_I を節点変位を用いて計算してみよう。部材 I の両端の節点を j、k とする。このとき、$L_I = |\vec{X}_k - \vec{X}_j|$ であり、

$$l_I = |\vec{x}_k - \vec{x}_j| = \sqrt{(\vec{X}_k + \vec{u}_k - (\vec{X}_j + \vec{u}_j), \vec{X}_k + \vec{u}_k - (\vec{X}_j + \vec{u}_j))} \tag{1.1}$$

である。式 (1.1) において内積の計算をし、変位が変形前の部材長に比べて十分小さいと仮定すれば、

$$l_I \approx L_I \left(1 + \frac{(\vec{u}_k - \vec{u}_j, \vec{X}_k - \vec{X}_j)}{L_I^2}\right)$$

となる。さらに、部材 I の端点である節点 j (k) において、（変形前の）部材 I の軸方向外向き単位ベクトルを $\vec{n}_{jI}$ $(\vec{n}_{kI})$ と書くことにすれば、

$$\vec{n}_{jI} = \frac{\vec{X}_j - \vec{X}_k}{L_I}, \quad \vec{n}_{kI} = \frac{\vec{X}_k - \vec{X}_j}{L_I}$$

であるので、

$$\delta_I = \vec{u}_j \cdot \vec{n}_{jI} + \vec{u}_k \cdot \vec{n}_{kI}$$

となり、一般には

$$\delta_I = \sum_{\text{部材 } I \text{ の端点 } i \text{ に関する和}} \vec{u}_i \cdot \vec{n}_{iI}$$

と書ける。更に、$\vec{n}_{iI}$ の定義を拡張して、

$$\vec{n}_{iI} = \begin{cases} \text{上の定義の通り} & \text{節点 } i \text{ が部材 } I \text{ の端点のとき、} \\ \vec{0} & \text{そうでないとき} \end{cases} \tag{1.2}$$

としておけば、単に

$$\delta_I = \sum_i \vec{u}_i \cdot \vec{n}_{iI} \tag{1.3}$$

と書いておけば良いことになる。なお、$\vec{n}_{iI}$ は変形前の部材軸方向ベクトルとしたが、変形が小さいと仮定しているので、変形後としても変わりはない。

一般に、あるトラスについて、式 (1.3) をみたす節点変位と部材の伸びの組 $(\vec{u}_i, \delta_I)$ のことを適合系という。適合系とは、幾何学的につじつまの合った節点変位と部材の伸びの組の事である。従ってトラスに許される変位及び伸びは適合系を成していなければならない。

1.3　トラスの釣り合い—釣合い系

トラスに限らず、変形する物体が釣り合っているとは、そのいかなる部分を取り出してもそれに働く力は合力、合モーメントが 0 となっていることを言う。なお、釣合いは変形後で考えるのが合理的であるが、微小変形を考え

るので変形前、変形後の区別は余り意識しないで良い。以下では一応合理性を保って、節点 i の位置ベクトルを $\vec{x}_i$ と書くことにする。

さて、トラスの節点には外力が働く。これらは荷重であるか、反力であるか、またはそれらの合力である。もちろん、特別な場合として、自由な節点は荷重 $\vec{0}$ を受けていることになる。一般に、節点 i に働く外力を節点力と言い、$\vec{f}_i$ で表す。釣り合っているトラスの部材内部にも力が働き、これらを内力という。

連続体や、それらを組み合わせたものの釣合いを考えるとき、それらをいくつかの部分に分けて、それらの間の力のやり取りを図示してみるとわかりやすい。そのような図を free body diagram と呼ぶ。例えばトラスの場合、ある節点 i での力のやり取りを考えるには図 1.1 の様なものを考えれば良い。図

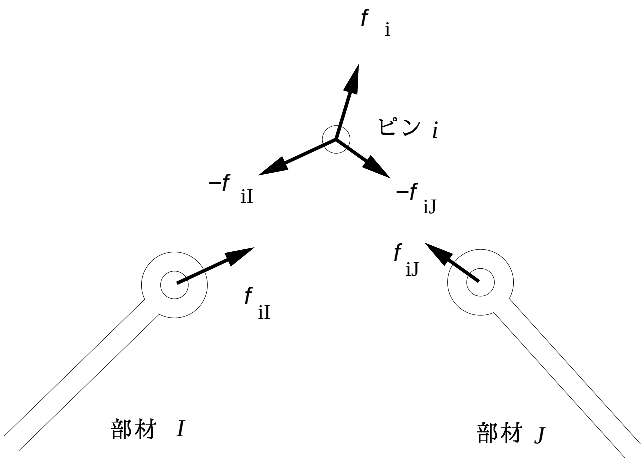


図 1.1: free body diagram

において $\vec{f}_{iI}$ 等は、ピン i が部材 I に及ぼす力（材端力と呼ばれる内力）を表す。作用反作用の法則により、部材 I がピン i に及ぼす力は $-\vec{f}_{iI}$ となり、節点 i ではそこに集まる各部材が及ぼす力と外力が釣り合っている。従って、

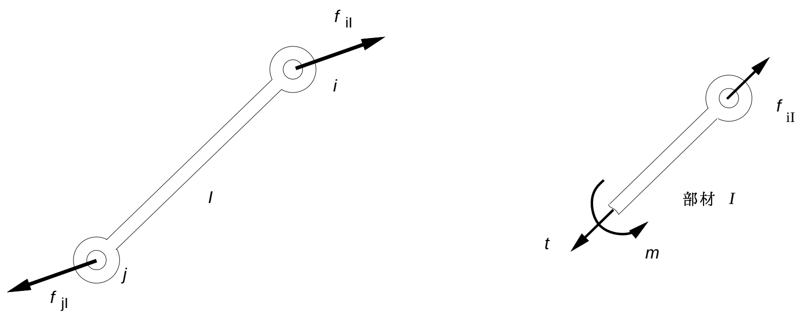
$$\vec{f}_i + \sum_{\text{節点 } i \text{ に集まる部材 } I \text{ に関する和}} (-\vec{f}_{iI}) = \vec{0}$$

でなければならないが、式 (1.2) を参照すれば上式は

$$\vec{f}_i = \sum_I \vec{f}_{iI} \tag{1.4}$$

と書けることになる。なお、トラス材端とピンの間に力のモーメントが働かないのは接合に摩擦がないからである。

次に、一本の部材について考える。図 1.2(a) を参照すれば、部材 I の釣合



(a)　　(b)

図 1.2: equilibrium of a truss member

いより、部材 I の端点 i、j での材端力は釣り合っていなければならず、

$$\vec{f}_{iI} + \vec{f}_{jI} = \vec{0}, \quad \vec{x}_i \times \vec{f}_{iI} + \vec{x}_j \times \vec{f}_{jI} = \vec{0}$$

でなければならない。従って、

$$\vec{f}_{jI} = -\vec{f}_{iI}, \quad \vec{f}_{iI} \parallel (\vec{x}_i - \vec{x}_j)$$

でなければならない。すなわち、$\vec{f}_{i(j)I}$ は部材 I の軸方向を向く。次に、トラス部材内部の力について考える。図 1.2(b) を参照して、トラス部材中の任意の位置で部材を切断したとき、断面に生じている力の合力と合モーメントを $\vec{t}$、$\vec{m}$ とすれば、図の切り方では

$$\vec{t} = -\vec{f}_{iI}, \quad \vec{m} = \vec{0}$$

を得る。これより、$\vec{t}$ は切断する位置に関係なく一定であり、節点 j を含む切り方をする場合を考慮して次のように言うことが出来る。すなわち、ある釣合い状態では、部材 I に固有の量 s_I があって、部材 I を任意の位置で切ると、その断面に発生する合力 $\vec{t}$ はその断面から外側を向く部材軸方向単位ベクトルを $\vec{n}$ として $\vec{t} = s_I \vec{n}$ と書ける。従って、特に $\vec{f}_{iI} = s_I \vec{n}_{iI}$ であるので、式 (1.4) は次のように書き変えられる。

$$\vec{f}_i = \sum_I s_I \vec{n}_{iI} \tag{1.5}$$

s_I を部材 I の部材力と呼ぶ。s_I の符号は引張りが正になっていることに注意されたい。一般に、式 (1.5) を満たす $(\vec{f}_i, s_I)$ の組を、釣合い系と呼ぶ。

$(\vec{f}_i, s_I)$ が釣合い系を成すとき、外力 $\vec{f}_i$ は全体として釣り合っている。実際、

$$\sum_i \vec{f}_i \quad = \quad \sum_i \sum_I s_I \vec{n}_{iI} = \sum_I s_I \left(\sum_i \vec{n}_{iI} \right) = \vec{0}$$

$$\sum_i \vec{x}_i \times \vec{f}_i = \sum_I s_I \left(\sum_i \vec{x}_i \times \vec{n}_{iI} \right) = \vec{0}$$

となる。各行最後の等式は、一つの部材 I を固定して i に関する和を考えてみれば明かである。

1.4 構成関係

トラス部材ののびと部材力の関係を表す材料特性のモデルを構成関係と呼ぶ。一番一般的な構成関係は、s_I が δ_I の履歴の関数であると言うものである。多少限定して、トラス部材が弾性体であると仮定すれば、構成関係は s_I が δ_I の（現在の値の）関数である、すなわち

$$s_I = \mathcal{F_I}(\delta_I), \quad \delta_I = \mathcal{F_I}^{-1}(s_I)$$

でるということになる。ここに $\mathcal{F_I}$ は適当な関数である。さらにトラス部材が線形弾性体であれば、トラス部材中の応力状態は部材軸方向の一軸引っ張り状態であろうから、

$$s_I = \frac{E_I A_I \delta_I}{l_I}, \quad \delta_I = \frac{l_I s_I}{E_I A_I}$$

となる。ここに、E_I、A_I、l_I は、それぞれ部材 I の Young 率、断面積、および長さである。さらに、熱膨張、初期不整など、部材力によらない伸び δ_{0I} がある場合には上式は

$$s_I = \frac{E_I A_I (\delta_I - \delta_{0I})}{l_I}, \quad \delta_I = \frac{l_I s_I}{E_I A_I} + \delta_{0I} \tag{1.6}$$

となる。たとえば温度によるのびを考える時は、

$$\delta_{0I} = l_I \alpha_I \Delta\theta$$

とすればよい。ここに、α_I、$\Delta\theta$ はそれぞれ部材 I の線膨張率、および温度上昇である。式 (1.6) を線形弾性トラスの構成関係と呼ぶ。

1.5 トラスの境界値問題

トラスの境界値問題と言う言葉はちょっと聞きなれないと思うが、要するにトラスの釣合問題を解いて変形や、部材力を求めることである。

トラスの境界値問題は次のように定式化される。

- Geometry (l_I, A_I, $\vec{n}_{iI}$)

- 構成関係
- 境界条件

を与えて、それらを満たす適合系 $(\vec{u}_i, \delta_I)$、釣合系 $(\vec{f}_I, s_I)$ を求める。

さて、トラスの境界条件とは何であろうか。もっと言えばトラスの境界とは何であろうか。トラスの境界とは（全ての）節点のことである。境界条件は n_d 次元問題においては各節点において $\vec{f}_i$ または $\vec{u}_i$ の成分を必ず n_d 個与える。ただし、ある節点で $\vec{f}_i$ と $\vec{u}_i$ の成分を与える時は、それぞれの与える成分が直交する方向のものでなければならない。たとえば、図 1.3 の場合、$n_d = 2$ (2 次元問題) であり、各節点で与える境界条件は次のようである。

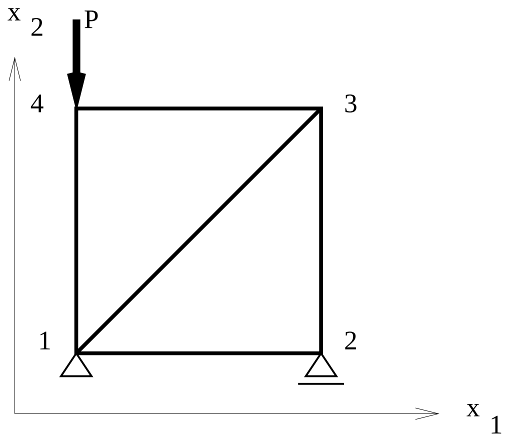


図 1.3: boundary condition

$$
\begin{array}{lll}
\text{節点 } 1 & \rightarrow & \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix} = \vec{0} \\
\text{節点 } 2 & \rightarrow & \left.\begin{array}{l} f_{12} = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 \text{ 方向} \\ u_{22} = 0 \quad \rightarrow \quad x_2 \text{ 方向} \end{array}\right\} \quad \text{直交} \\
\text{節点 } 3 & \rightarrow & \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} f_{13} \\ f_{23} \end{pmatrix} = \vec{0} \\
\text{節点 } 4 & \rightarrow & \vec{f}_4 = \begin{pmatrix} f_{14} \\ f_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix}
\end{array}
$$

ここに $\vec{f}_i$ の x_j 成分等を f_{ji} 等と書いた。一つ以上の変位成分が与えられている節点を支点という。

従って、トラスの境界値問題を解くことは、変形はつじつまが合い、力は釣合い、変形と力は構成式で結ばれ、かつ境界条件を満たす変形、および力を求めることである。

1.6　幾何学的に許容な系

この節と次節では、トラスの境界値問題を解くための準備として、用語を導入する。

幾何学的に許容な系とは、与えられた境界条件のうち、節点変位に関係するものだけを満たす適合系のことを言う。従って、幾何学的に許容な系を構成することは容易であり、節点変位 $\vec{u}_i$ のうち、境界条件として与えられているものは与えられた値とし、その他は任意に選び、式 (1.3) を用いてのびを計算することによって得ることができる。具体的には、まず、節点変位 $\vec{u}_i$ を並べたベクトル $\vec{u}$ を導入する。

$$\vec{u} := \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vdots \\ \vec{u}_n \end{pmatrix}$$

さらに $\vec{u}$ を未知の成分と、既知の成分とに並べ変えると、

$$Q\vec{u} = \begin{array}{c} m \\ nn_d - m \end{array} \begin{pmatrix} \vec{\bar{u}} \\ \vec{u}_0 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

となる。ここに、$\vec{\bar{u}}$、$\vec{u}_0$、n、m はそれぞれ未知の節点変位成分、既知の節点変位成分、節点数、未知の節点変位成分の数である。たとえば、図 1.3 の場合、(1.7) に現れる量は次のように書くことができる。

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\bar{u}} = \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{13} \\ u_{23} \\ u_{14} \\ u_{24} \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

一般に、Q は単に $\vec{u}$ の直交成分を並べ変える操作を表し、$\vec{u}$ と $Q\vec{u}$ のベクトルとしての長さは等しい。従って Q は直交行列であり、幾何学的に許容な節点変位は、(1.7) より

$$\vec{u} = Q_1^T \vec{\bar{u}} + Q_2^T \vec{u}_0 \tag{1.8}$$

と書ける。ここに、$Q_{1,2}$ は次式により導入される Q の部分行列である。

$$Q = \begin{array}{c} m \\ nn_d - m \end{array} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

次に行列 $\tilde{B}$、およびベクトル $\vec{\delta}$ を次式により導入する。

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \vec{n}_{11}^T & \vec{n}_{21}^T & \cdots & \vec{n}_{n1}^T \\ \vec{n}_{12}^T & \vec{n}_{22}^T & \cdots & \vec{n}_{n2}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{n}_{1N}^T & \vec{n}_{2N}^T & \cdots & \vec{n}_{nN}^T \end{pmatrix}, \quad \vec{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_N \end{pmatrix}$$

ここに、N は部材数である。式 (1.3) は明らかに $\vec{\delta} = \tilde{B}\vec{u}$ と書けるので、(1.8) より

$$\vec{\delta} = B\vec{\tilde{u}} + B'\vec{u}_0, \quad B = \tilde{B}Q_1^T, \quad B' = \tilde{B}Q_2^T \tag{1.9}$$

を得る。以上より、幾何学的に許容な系とは、与えられた $\vec{u}_0$ と任意の $\vec{\tilde{u}}$ から式 (1.8)、(1.9) によって求められる $\vec{u}$、$\vec{\delta}$ のことであると言うことができる。

1.7　静力学的に許容な系

静力学的に許容な系とは、与えられた境界条件のうち、節点力に関係するものだけを満たす釣合系のことを言う。幾何学的に許容な系とは異なり、静力学的に許容な系を構成することは一般にはさほど容易ではない。と言うのは一般には不定方程式を解かなければ静力学的に許容な系を決定できないからである。（とは言っても、従来の構造力学の教科書はほとんどが静力学的に許容な系を構成することは比較的容易であると言う立場で書かれている。これは手計算で解ける程度のトラス問題についてはある程度真であるが、一般には上述のように「容易ではない」と言わざるを得ない）

静力学的に許容な系の求め方の一般論は次のようである。今、節点力 $\vec{f}_i$ を並べたベクトル $\vec{f}$ を導入する。

$$\vec{f} := \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ \vdots \\ \vec{f}_n \end{pmatrix}$$

さらに $\vec{f}$ を既知の成分と、未知の成分とに並べ変えると、(1.7) で導入した行列 Q を用いることによって

$$Q\vec{f} = \begin{array}{c} m \\ nn_d - m \end{array} \begin{pmatrix} \vec{f}_0 \\ \vec{\tilde{f}} \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

となる。ここに、$\vec{f}_0$、$\vec{\tilde{f}}$ はそれぞれ既知の節点力成分、未知の節点力成分である。前者は荷重、後者は反力と呼ばれる。未知の節点変位成分の数 m は与えられた節点力の成分の数に一致する。

式 (1.5) は明らかに

$$\vec{f} = \tilde{B}^T \vec{s}, \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_N \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

と書ける。従ってある釣合系が静力学的に許容であるためには、(1.9)、(1.10)、(1.11) より

$$B^T \vec{s} = \vec{f}_0 \tag{1.12}$$

でなければばならない。以上より、一般に、静力学的に許容な系とは、(1.12) を満たす $\vec{s}$ から (1.11) によって構成される釣合系であると言うことができる。従って、静力学的に許容な系では、反力は

$$\vec{\bar{f}} = B'^T \vec{s} \tag{1.13}$$

によって計算される ((1.9)、(1.10)、(1.11) 参照)。

さて、あるトラスは任意の $\vec{f}_0$ に対して (1.12) を満たす $\vec{s}$ が存在する時、安定であると言う。そうでない時は不安定であると言う。有限次元の Fredholm の alternative より、安定性の条件は $\mathrm{ker}B = \{\vec{0}\}$ と書くことができる。従って (1.9) より、安定なトラスとは、与えられた節点変位 $\vec{u}_0$ が $\vec{0}$ のとき、全ての部材ののびが 0 になるような $\vec{u} = \vec{0}$ でない節点変位は存在しないようなトラスである。また、安定なトラスとは $m = \mathrm{rank}B$ （従って $N \geq m$）を満たすトラスであるとも言える。従って、例えば、ある線形弾性トラスが安定であるときには、支点変位がない（$\vec{u}_0 = \vec{0}$）場合、支点以外の節点を動かすと（より正確には $\vec{u} \neq \vec{0}$ とすると）必ず何らかの部材力が生じ、不安定であるときには部材力を生じさせない様に支点以外の節点を変位させることができる。

安定なトラスにおいて、数 $n_i := N - \mathrm{rank}B = N - m$ を不静定次数と言う。不静定次数が 0 のトラスを静定トラスと言う。静定トラスにおいては行列 B は正則である。従って、(1.9) より、静定トラスとは、部材ののびを任意に与えても、それを実現する節点変位が唯一存在するトラスであると言うことができる。このため、静定トラスには初期不整を与えても残留応力は発生しない。不静定トラスにおいては方程式 (1.12) の解は不静定次数 (n_i) 個の任意定数を除いて決定する。実際、(1.12) の解 $\vec{s}$ は

$$\vec{s} = \vec{s}_0 + \sum_{j=1}^{n_i} \vec{s}_j^* \tilde{s}_j$$

と書ける。ここに、$\vec{s}_0$ は (1.12) の任意の解（安定トラスでは必ず存在する）、$\vec{s}_j^*$ $(j = 1, \ldots, n_i)$ は

$$B^T \vec{s}_j^* = \vec{0}, \quad j = 1, \ldots, n_i$$

を満たす、互いに独立な（従って $\vec{0}$ でない）ベクトル、$\tilde{s}_j$ は任意定数であり、不静定力と呼ばれる。以上を少し整理して、静力学的に許容な部材力は

$$\vec{s} = \vec{s}_0 + S\vec{\tilde{s}}, \quad S := (\vec{s}^*_1, \vec{s}^*_2, \ldots, \vec{s}^*_{n_i}), \quad \vec{\tilde{s}} := \begin{pmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_2 \\ \vdots \\ \tilde{s}_{n_i} \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

と書ける。S は $B^T S = 0$ を満たす (N, n_i) 型の full rank の行列である。

トラスの境界値問題は変形の系が幾何学的に許容であり、力の系が静力学的に許容であり、それらが構成関係で結ばれているような変形と力の系を決定する問題であるということができる。

1.8 トラスの境界値問題の解法—変位法

現在実務においてトラスの計算を行なう時、手計算によることはまずない。計算機を用いた構造解析には変位を未知数とした解析法、すなわち変位法が用いられるのが普通である。以下、線形弾性体のトラスについて、この方法を説明する。

まず式 (1.9) および (1.6) （$\delta_{0I} = 0$ とする）より、幾何学的に許容な場に構成式を適用して求めた部材力は

$$\vec{s} = DB\vec{\tilde{u}} + DB'\vec{u}_0, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{E_1 A_1}{l_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{E_N A_N}{l_N} \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

となる。これが静力学的に許容でなければならないから、(1.12) より

$$B^T DB\vec{\tilde{u}} = \vec{f}_0 - B^T DB'\vec{u}_0 \tag{1.16}$$

を得る。これを未知量 $\vec{\tilde{u}}$ について解くのが変位法である。これを解くことができれば変位に関する境界条件を考慮してベクトル $\vec{u}$ が決定され、(1.3) より部材ののびが、構成関係より部材力が、そして (1.5) より節点力が求められる。式 (1.16) の左辺の係数行列は明らかに対称であり、E_I が正であるので、非負定値である。$B^T DB\vec{x} = 0$ に非自明解が存在するのは $B\vec{x} = 0$ に非自明解が存在する時に限るので、トラスが安定 (1.7 参照) である限り行列 $B^T DB$ は正則となる。従って、安定なトラスでは (1.16) は可解である。

1.9 トラスの境界値問題の解法—応力法

伝統的な、手計算による構造力学においては、主要なトラスの解法は応力法である。この場合、静力学的に許容な場から出発し、構成関係によって求

められた部材ののびと変位に関する境界条件から得られる適合条件を満たすように不静定力を決定する。不静定次数の低い簡単な問題では手計算による解も可能であることが多いが、数値計算には余り適しているとはいえない。また、変位計算は別途行なわなければならない。以下では変位法の双対問題としての応力法を、線形弾性トラスの場合について述べる。なお、実際の計算に以下の方法がとられることは稀であり、仮想仕事の原理に基づくのが普通である。ただし、以下に述べる計算と仮想仕事によるものとは等価である。

安定なトラスに対する応力法では静力学的に許容な場、すなわち、式 (1.14) の右辺を計算ことから出発する。これは (1.12) の解を求めることであり、静定トラスにおいては $\vec{s} = \vec{s}_0$ を得、これで応力法は終了である。不静定トラスにおいてはさらに不静定力を決定しなければならない。そのため、$\vec{s}$ から構成式を用いて求められた部材ののび $\vec{\delta}$ は幾何学的に許容でなければならないので、(1.9) より

$$B\vec{\tilde{u}} = \vec{\delta} - B'\vec{u}_0$$

を満たすベクトル $\vec{\tilde{u}}$ が存在しなければならない。有限次元の Fredholm の alternative より、上式が可解であるためには

$$S^T\vec{\delta} = S^T B'\vec{u}_0 \tag{1.17}$$

でなければならない ((1.14) 参照)。従って、特に

$$\vec{\delta} = D^{-1}\vec{s}$$

で与えられる線形弾性トラスでは (D は正値なので可逆である)、(1.14) より、不静定力 $\vec{\tilde{s}}$ は方程式

$$S^T D^{-1} S\vec{\tilde{s}} = S^T B'\vec{u}_0 - S^T D^{-1}\vec{s}_0 \tag{1.18}$$

を解くことによって求められる。S は full rank であるので、上式の係数行列は正則である。

1.10 仮想仕事の原理

以下では仮想仕事の原理について述べる。歴史的な経緯により「原理」という表現を用いるが、実際は定理である。まず原理と、証明を述べる。

定理１（仮想仕事の原理） あるトラスの任意の釣合系 $(\vec{f}_i^*, s_I^*)$ と任意の適合系 $(\vec{u}_i, \delta_I)$ は次式を満たす。

$$\sum_i \vec{f}_i^* \cdot \vec{u}_i = \sum_I s_I^* \delta_I \tag{1.19}$$

（証明） (1.3)、(1.5)、及び以下の計算より明らか。

$$\sum_i \vec{f}_i^* \cdot \vec{u}_i \quad = \quad \sum_i \sum_I s_I^* \vec{n}_{iI} \cdot \vec{u}_i$$

$$= \sum_I s_I^* \sum_i \vec{n}_{iI} \cdot \vec{u}_i$$
$$= \sum_I s_I^* \delta_I.$$

（証明終）

1.6、1.7節の記号を用いれば、仮想仕事の原理は次のようにも書ける。

$$\vec{f}^* \cdot \vec{u} = \vec{s}^* \cdot \vec{\delta}$$

仮想仕事の原理に現れる2つの系は互いに関連している必要はない。このことは仮想仕事の原理が構成式に関係せず成り立つものであることを意味している。

仮想仕事の原理の直接的な系をいくつか述べるために次の定義を行なう。幾何学的に許容な系のうち $\vec{u}_0 = \vec{0}$（(1.7) 参照）を満たすものを幾何学的に許容な斉次系と呼ぶ。同様に、静力学的に許容な系のうち $\vec{f}_0 = \vec{0}$（(1.10) 参照）を満たすものを静力学的に許容な斉次系と呼ぶ。幾何学的に許容な斉次系とは、要するに支点変位がない幾何学的に許容な場である。静力学的に許容な斉次系とは与えられた荷重が全て0の静力学的に許容な系であり、従って、静定構造では $\mathbf{0}$ のみとなる。次の結果が成り立つ。

系1（仮想仕事の原理（狭義）） R^N の元 $\vec{s}$ は全ての幾何学的に許容な斉次場 $(\vec{u}^*, \vec{\delta}^*)$ に対して

$$\vec{s} \cdot \vec{\delta}^* = \vec{f}_0 \cdot \vec{\tilde{u}}^* \qquad (1.20)$$

を満たすとする。ここに $\vec{\tilde{u}}^* = Q_2 \vec{u}^*$ ((1.8) 参照)。この時、$(\sum_I s_I \vec{n}_{iI}, s_I)$ は静力学的に許容である。逆に、静力学的に許容な $(\vec{f}, \vec{s})$ は任意の幾何学的に許容な斉次場 $(\vec{u}^*, \vec{\delta}^*)$ に対して (1.20) をみたす。

（証明） 前半を証明する。式 (1.9) より、(1.20) は

$$\vec{s} \cdot B\vec{\tilde{u}}^* = \vec{f}_0 \cdot \vec{\tilde{u}}^*$$

と書けるが、$\vec{\tilde{u}}^*$ は任意なので、上式は (1.12) に他ならない。従って、系の前半が示された。後半は (1.19) より明らか。（証明終）

系2（補仮想仕事の原理） R^N の元 $\vec{\delta}$ は全ての静力学的に許容な斉次場 $(\vec{f}^*, \vec{s}^*)$ に対して

$$\vec{s}^* \cdot \vec{\delta} = \vec{\tilde{f}}^* \cdot \vec{u}_0 \qquad (1.21)$$

を満たすとする。ここに $\vec{\tilde{f}}^* = B'^T \vec{s}^*$ である ((1.13) 参照)。この時、(1.7) を満たす $\vec{u}$ があって、$(\vec{u}, \vec{\delta})$ は幾何学的に許容である。逆に、幾何学的に許容な $(\vec{u}, \vec{\delta})$ は任意の静力学的に許容な斉次場 $(\vec{f}^*, \vec{s}^*)$ に対して (1.21) をみたす。

（証明） 前半は、式 (1.9) を参照して、

$$B\vec{\tilde{u}} = \vec{\delta} - B'\vec{u}_0$$

が $\vec{\tilde{u}}$ について可解であることを示せば良い。つまり、(1.17) を参照して、

$$S^T(\vec{\delta} - B'\vec{u}_0) = 0 \tag{1.22}$$

が示されれば良い。しかし、(1.14) より、$\vec{s}^*$ は任意の不静定力 $\vec{\tilde{s}}^*$ によって

$$\vec{s}^* = S\vec{\tilde{s}}^*$$

と書けるので、結局 (1.21) は

$$\vec{\tilde{s}}^* \cdot S^T(\vec{\delta} - B'\vec{u}_0) = 0$$

と書けるが、$\vec{\tilde{s}}^*$ は任意なので、上式は (1.22) に他ならない。従って、系の前半が示された。後半は明らか。（証明終）

以上より、狭義の仮想仕事の原理は釣合い式として、また、補仮想仕事の原理は適合条件として用いられる。

1.11　仮想仕事の原理の応用—変位法によるトラスの境界値問題の解法と単位変位法

変位法によるトラスの解法における仮想仕事の原理の応用について述べる。本節の内容は新しいものではなく、1.8 の内容の誘導の別法を与えるに過ぎない。しかし、有限要素法では通常以下の論法を用いるので、その雛型としての価値はあるであろう。なお、本節の内容は、特に断らない限り構成式の形に依存しない。

まず、変位法によるトラスの境界値問題の解法を、仮想仕事を用いて導く。変位法では幾何学的に許容な系から出発する。即ち、(1.9) より、部材の伸びは

$$\vec{\delta} = B\vec{\tilde{u}} + B'\vec{u}_0$$

であるが、これと構成式を用いて求めた部材力 $\vec{s}(\vec{\delta})$ が静力学的に許容でなければならない。従って、狭義の仮想仕事の原理 (1.20) より、

$$\vec{\tilde{u}}^* \cdot B^T\vec{s}(\vec{\delta}) = \vec{\tilde{u}}^* \cdot \vec{f}_0 \tag{1.23}$$

を得る。ここに $\vec{\tilde{u}}^*$ は R^m の任意の元であり、任意の幾何学的に許容な斉次系 $(\vec{u}^*, \vec{\delta}^*)$ が

$$\vec{u}^* = Q_1^T\vec{\tilde{u}}^*, \quad \vec{\delta}^* = B\vec{\tilde{u}}^*$$

と書けることを用いた。式 (1.23) は (1.12) を未知変位を用いて書き下したものに他ならず、特に線形弾性トラスでは (1.16) と同一の内容である。

上のようにしてトラスの変位が完全に求められると、反力は次のようにして求められる。まず、支点で変位が $\vec{u}_{*0}$、その他の節点での変位は 0 である

ような適合系を仮想的に考える。$\vec{u}_{*0}$ の典型的なとり方として、反力を求めたい支点に、求めたい方向に単位大きさの変位、それ以外は 0 とするものが考えられ、その場合、以下の計算は単位変位法と呼ばれる。仮想適合系の伸び $\vec{\delta}_*$ は

$$\vec{\delta}_* = B'\vec{u}_{*0}$$

となる。一方、(真の) 境界値問題の解は釣合系であるので、これらの間に仮想仕事の原理 (1.19) を書き下すと

$$\mathcal{L} := \vec{\tilde{f}} \cdot \vec{u}_{*0} = \vec{s} \cdot \vec{\delta}_* = (B'^T \vec{s}) \cdot \vec{u}_{*0} \tag{1.24}$$

を得る。ここに、$\mathcal{L}$ は一般化力と呼ばれる。上式の特別な場合として

$$\vec{\tilde{f}} = B'^T \vec{s}$$

を得る。これは (1.13) に他ならない。

1.12 仮想仕事の原理の応用— 応力法によるトラスの境界値問題の解法と単位荷重法

応力法によるトラスの解法においては、手計算による不静定力の決定法として仮想仕事の原理によるものが一般的である。また、手計算によって変位を求める時には以下に述べる単位荷重法を利用することが多い。本節前半の不静定構造の解法に関する内容は、1.9 の結果の別法による誘導となっている。なお、本節の内容も特に断らない限り構成式の形には依存しない。

まず、応力法による不静定トラスの境界値問題の解法を、仮想仕事を用いて導く。応力法では静力学的に許容な系から出発する。即ち、(1.14) より、部材力は

$$\vec{s} = \vec{s}_0 + S\vec{\tilde{s}}$$

であるが、これと構成式を用いて求めた部材の伸び $\vec{\delta}(\vec{s})$ が幾何学的に許容でなければならない。従って、補仮想仕事の原理 (1.21) より、

$$\vec{\tilde{s}}^* \cdot S^T \vec{\delta}(\vec{s}) = \vec{\tilde{s}}^* \cdot S^T B' \vec{u}_0 \tag{1.25}$$

を得る。ここに $\vec{\tilde{s}}^*$ は R^{n_i} の任意の元であり、任意の静力学的に許容な斉次系 $(\vec{s}^*, \vec{f}^*)$ が

$$\vec{s}^* = S\vec{\tilde{s}}^*, \quad \vec{\tilde{f}}^* = B'^T S \vec{\tilde{s}}^*$$

と書けることを用いた。式 (1.25) は (1.17) を $\vec{\tilde{s}}$ を未知数として書き下したものに他ならず、特に線形弾性トラスでは (1.18) と同一の内容である。

静定トラスでは釣合により、また不静定トラスでは上のようにしてトラスの部材力が完全に求められると、未知の節点変位は次のようにして計算され

る。まず、支点以外の節点で与えられた節点力が $\vec{f}_{*0}$ であるような仮想的な釣合系を一つ選ぶ。$\vec{f}_{*0}$ の典型的なとり方として、変位を求めたい節点に、求めたい方向に単位大きさの荷重、それ以外は 0 とするものが考えられ、これを用いた場合、以下の計算は単位荷重法と呼ばれる。仮想釣合系の部材力 $\vec{s_*}$ は (1.12) より

$$B^T \vec{s_*} = \vec{f}_{*0}$$

の解として求まる。安定なトラスでは上式は可解ではあるが、一般に不静定次数個の自由度を残して決定される。そこで、そのような $\vec{s_*}$ を 1 つ任意に固定する。対応する反力 $\vec{\bar{f}}_*$ は

$$\vec{\bar{f}}_* = B'^T \vec{s}_*$$

となる。以上の仮想釣合系と、(真の) 境界値問題の解 (適合系) の間に仮想仕事の原理 (1.19) を書き下すと

$$\mathcal{U} := \vec{\bar{u}} \cdot \vec{f}_{*0} = \vec{\delta}(\vec{s}) \cdot \vec{s}_* - \vec{u}_0 \cdot B'^T \vec{s}_* \tag{1.26}$$

を得る。ここに $\mathcal{U}$ は一般化変位と呼ばれ、$\vec{\delta}(\vec{s})$ は部材力から構成式によって求められた部材の伸びである。特に、単位荷重法では (1.26) 左辺は求めたい変位成分に一致することに注意されたい。このようにしてトラスの変位を計算することが出来る。なお、仮想釣合系は仮想荷重と釣合系をなしておりさえすれば良く、このことを用いて不静定構造の変位計算を簡単に行なうことが出来ることがある。

1.13 種々のエネルギ

以下ではいわゆるエネルギ法について述べる。エネルギ法は、弾性体の力学の境界値問題の解が何らかのエネルギを停留にすることに基づいている。これは独立した物理法則ではなく、今まで見てきた弾性トラスの境界値問題の解の一性質に過ぎない。また、仮想仕事の原理は構成式の形によらないものであったが、エネルギ法は構成関係が弾性である時に限ったものである。この意味で、エネルギ法は仮想仕事の原理に比べて第 2 義的なものであると考えることが出来る。前節、前々節で述べた仮想仕事の原理の境界値問題の解法への応用、単位変位・荷重法を、各々、弾性の場合にエネルギの言葉で言い替えたものが、いわゆる最小仕事の原理、および Castigliano の定理である。従って、これらの結果の習得は仮想仕事の原理を正しく理解したものにとっては特に必要とは言えないかも知れないが、エネルギ原理は一つのスカラ量のみ扱えば良いと言う意味においては book keeping 的な価値があるとは言えるであろう。

さて、あるトラスの部材が弾性体で出来ているものとする。この時、構成関係

$$s_I = s_I(\delta_I), \quad \delta_I = \delta_I(s_I)$$

を積分したもの

$$W_I(\delta_I) = \int_0^{\delta_I} s_I(\delta) d\delta, \quad W_I^*(s_I) = \int_0^{s_I} \delta_I(s) ds$$

を、各々、ひずみエネルギ関数、および補ひずみエネルギ関数と呼ぶ。これらは明らかに関係

$$\frac{\partial W_I}{\partial \delta_I} = s_I, \quad \frac{\partial W_I^*}{\partial s_I} = \delta_I$$

を満たす。線形弾性体においてはこれらは構成関係で結ばれる s_I と δ_I に対して等しくなる。

次に、あるトラスの境界値問題 (1.5 節参照) における幾何学的に許容な系 ((1.8)、(1.9) 参照)

$$\vec{u} = Q_1^T \vec{\tilde{u}} + Q_2^T \vec{u}_0, \quad \vec{\delta} = B\vec{\tilde{u}} + B'\vec{u}_0$$

に対して、ポテンシャルエネルギ $\Pi(\vec{u})$ を次式で定義する。

$$\Pi(\vec{u}) = \sum_I W_I(\delta_I) - \vec{f}_0 \cdot \vec{\tilde{u}} \tag{1.27}$$

右辺第 2 項は $\vec{f} \cdot \vec{u}$ ではなく、$\Pi(\vec{u})$ の物理的意味は余りわかり良いものではない。

同じく、あるトラスの境界値問題 (1.5 節参照) における静力学的に許容な系 $(\vec{f}, \vec{s})$ に対して、補ポテンシャルエネルギ $\Pi^*(\vec{s})$ を次式で定義する。

$$\Pi^*(\vec{s}) = \sum_I W_I^*(s_I) - \vec{\tilde{f}} \cdot \vec{u}_0 \tag{1.28}$$

ここに、

$$\vec{\tilde{f}} = B'^T \vec{s}$$

である ((1.13) 参照)。

右辺第 2 項は $\vec{f} \cdot \vec{u}$ ではなく、$\Pi^*(\vec{s})$ の物理的意味はやはり余りわかり良いものではない。

1.14 エネルギ停留原理

トラスが弾性体の場合、1.11、1.12 の各々の前半で述べた境界値問題の解法は、エネルギを用いて、次のように言い替えることが出来る。

定理 2（ポテンシャルエネルギ停留）　弾性体トラスの境界値問題の解は、幾何学的に許容な $(\vec{u}, \vec{\delta})$ のうち $\Pi(\vec{u})$ を停留にするものである。逆も正しい。

（証明）直接計算により

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \vec{u}} = B^T \vec{s}(\vec{\delta}) - \vec{f}_0$$

を得る。よって、$\partial\Pi/\partial\vec{u} = \vec{0}$ は (1.12) より、つりあい式に他ならない。（証明終）

定理 3（補ポテンシャルエネルギ停留）　弾性体トラスの境界値問題の解は、静力学的に許容な $(\vec{f}, \vec{s})$ のうち $\Pi^*(\vec{s})$ を停留にするものである。逆も正しい。

（証明）直接計算により

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial \vec{s}} = S^T \vec{\delta}(\vec{s}) - S^T B' \vec{u}_0$$

を得る。よって、$\partial\Pi^*/\partial\vec{s} = \vec{0}$ は (1.17) より、適合条件式に他ならない。（証明終）

特に、線形弾性体トラスにおいては $W_I^*(s_I(\delta_I)) = W_I(\delta_I)$ であり、さらに与えられた節点変位が $\vec{u}_0 = \vec{0}$ の場合 Π^* はひずみエネルギに一致する。それゆえ、$\vec{u}_0 = \vec{0}$ の場合の補ポテンシャルエネルギ停留原理のことを最小仕事の原理と呼ぶことが多い。

1.15　Castigliano の定理

トラスが弾性体の場合、1.11、1.12 の各々の後半で述べた単位変位、荷重法を、エネルギを用いて言い替えたものが Castigliano の定理である。

与えられたトラスの境界値問題の解を $\vec{u}$、$\vec{\delta}$、$\vec{f}$、$\vec{s}$ とし、$(\vec{u}_*, \vec{\delta}_*) = (Q_2^T \vec{u}_0, B'\vec{u}_0)$ を 1.11 節で導入した仮想適合系とする。この時、次の結果が成り立つ。

定理 4（Castigliano）　式 (1.24) で導入した一般化力 $\mathcal{L}$ は

$$\mathcal{L} = \left. \frac{\partial \Pi(\vec{u} + d\,\vec{u}_*)}{\partial d} \right|_{d=0} \tag{1.29}$$

と書ける。

（証明）直接微分することによって、

$$\left. \frac{\partial \Pi(\vec{u} + d\,\vec{u}_*)}{\partial d} \right|_{d=0} = \vec{s} \cdot B' \vec{u}_{*0}$$

となるが、これは式 (1.24) より、一般化力 $\mathcal{L}$ に等しい。（証明終）

次に、$(\vec{f}_*, \vec{s}_*)$ を、1.12 節で導入した、支点以外の節点で与えられた節点力が $\vec{f}_{*0}$ であるような仮想釣合系とする。この系は

$$B^T \vec{s}_* = \vec{f}_{*0}, \quad \vec{\bar{f}}_* = B'^T \vec{s}_*$$

を満たす。次の結果が成り立つ。

定理 5（Castigliano）　式 (1.26) で導入した一般化力 $\mathcal{U}$ は

$$\mathcal{U} = \left. \frac{\partial \Pi^*(\vec{s} + P\,\vec{s}_*)}{\partial P} \right|_{P=0} \tag{1.30}$$

と書ける。

（証明）直接微分することによって、

$$\left. \frac{\partial \Pi^*(\vec{s} + P\,\vec{s}_*)}{\partial P} \right|_{P=0} = \vec{\delta}(\vec{s}) \cdot \vec{s}_* - \vec{u}_0 \cdot B'^T \vec{s}_*$$

となるが、これは式 (1.26) より、一般化力 $\mathcal{U}$ に等しい。（証明終）

多くの教科書に書かれている Castigliano の定理を (補) ポテンシャル停留原理から導く論法は誤りである。ないしは、かなり手の込んだ修正を要する。誠に遺憾である。

1.16　相反性

線形弾性体のトラス (この仮定は本質的である) においては次の相反性定理が成り立つ。

定理 6（相反性）　$(\vec{u}_i, \vec{\delta}_i, \vec{f}_i, \vec{s}_i)$ $(i = 1, 2)$ はそれぞれある同一の線形弾性体トラスに対する 2 つの境界値問題の解であるとする。即ち $(\vec{u}_i, \vec{\delta}_i)$ は適合系 ((1.3) 参照) であり、$(\vec{f}_i, \vec{s}_i)$ は釣合い系 ((1.5) 参照) であって、さらに構成関係 $\vec{s}_i = D(\vec{\delta}_i - \vec{\delta}_i^0)$ が成り立つとする。ここに $\vec{\delta}_i^0$ は問題 i における初期伸び ((1.6) 参照) である。このとき次式が成り立つ

$$\vec{f}_1 \cdot \vec{u}_2 - \vec{s}_1 \cdot \vec{\delta}_2^0 = \vec{f}_2 \cdot \vec{u}_1 - \vec{s}_2 \cdot \vec{\delta}_1^0 \tag{1.31}$$

（証明）仮想仕事 (1.19)、構成関係 (1.6)、構成関係の対称性 (1.15)、仮想仕事 (1.19) を順に用いて

$$\begin{aligned}
\vec{f}_1 \cdot \vec{u}_2 &= \vec{s}_1 \cdot \vec{\delta}_2 \\
&= D(\vec{\delta}_1 - \vec{\delta}_1^0) \cdot (\vec{\delta}_2 - \vec{\delta}_2^0) + \vec{s}_1 \cdot \vec{\delta}_2^0 \\
&= (\vec{\delta}_1 - \vec{\delta}_1^0) \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_1 \cdot \vec{\delta}_2^0 \\
&= \vec{u}_1 \cdot \vec{f}_2 - \vec{\delta}_1^0 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_1 \cdot \vec{\delta}_2^0
\end{aligned}$$

を得る。（証明終）

式 (1.31) の特殊ケースとして次の結果が得られる。

1. $i = 1, 2$ の問題で与えられた支点変位が 0 であり、即ち、与えられた変位境界条件が $\vec{u}_{0i} = \vec{0}$ を満たし ((1.7) 参照)、初期伸びが無く、与えられた節点力 $\vec{f}_{0i}$ ((1.10) 参照) が 節点 j_i に作用する単位ベクトルであるとき、式 (1.31) は荷重 $\vec{f}_1$ による節点 j_2 の $\vec{f}_2$ 方向の変位は、荷重 $\vec{f}_2$ による節点 j_1 の $\vec{f}_1$ 方向の変位に等しい事を意味する。

2. $i=1$ の問題で与えられた支点変位が 0 であり ($\vec{u}_{01}=\vec{0}$)、与えられた節点力 $\vec{f}_{01}$ が 節点 j_1 に作用する単位ベクトルであるとする。又、$i=2$ の問題で与えられた節点力が 0 であり ($\vec{f}_{02}=\vec{0}$)、与えられた節点変位 $\vec{u}_{02}$ が 節点 j_2 において単位ベクトルであって、他の節点では 0 とする。また $i=1,2$ の問題で期伸びが 0 とする。このとき、 $\vec{f}_{01}$ による節点 j_2 の節点力の $\vec{u}_{02}$ 方向成分 (これは変位が与えられた節点であるから、反力である。(1.10) 参照) は $\vec{u}_{02}$ による節点 j_1 の変位の $\vec{f}_{01}$ 方向成分に負号をつけたものに等しい。
3. $i=1,2$ の各問題で与えられた節点変位に関する境界条件が斉次で ($\vec{u}_{0i}=\vec{0}$)、更に問題 1 では与えられた節点力 $\vec{f}_{01}$ が 節点 j に作用する単位ベクトルであって、初期伸びは 0、問題 2 で与えられた力の境界条件が斉次 ($\vec{f}_{02}=\vec{0}$) で、$\vec{\delta}_2^0$ が部材 J における単位伸びであるとき、荷重 $\vec{f}_{01}$ による部材 J の部材力は、部材 J の単位のびによる節点 j の変位の $\vec{f}_{01}$ 方向成分に等しい。

相反性定理は、要するにトラスの Green 公式である。また上記特殊ケースの 1 は要するに Green 関数の対称性である。特殊ケース 1、2、3 はそれぞれ、たわみ、反力、部材力の影響線の作図に用いられる。

付録：有限次元の Fredholm の alternative

有限次元の Fredholm の alternative とは次の主張のことである。

A を実 (m,n) 行列、$\vec{b}$ を R^m の元とする。このとき、方程式 $A\vec{x}=\vec{b}$ が $\vec{x}\in R^n$ について解けることと $\vec{b}\perp\ker(A^T)$ であることは同値である。解 $\vec{x}$ は存在すれば $\ker(A)$ の自由度を残して決まる。

証明は、線形代数の教科書ならどれにでも載っている線形方程式の可解性定理を書き換えれば良い。